MAT431 Equations différentielles et Systèmes dynamiques

Raphaël KRIKORIAN

4 septembre 2012

Plan du cours 3

Lire :

- Chapitre 3 de [V], en entier

Sommaire Plan du cours 3

Equations linéaires dépendant du temps

Nous étudions les E.D.O. affines de la forme

$$\begin{cases} \dot{X}(t) = A(t)X(t) + b(t) \\ X(t_0) = X_0 \end{cases}$$

où $A \in C^0(I, M(n, \mathbb{K}))$, $b \in C^0(I, \mathbb{K}^n)$ (I intervalle de $\mathbb{R}$, $t_0 \in I$, $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$).
Auparavant nous nous concentrons sur les équations linéaires

$$\begin{cases} \dot{X}(t) = A(t)X(t) \\ X(t_0) = X_0 \end{cases}$$

L'espace $\mathcal{E}_{A(\cdot)}$ des $X(\cdot) \in C^1(I, \mathbb{K}^n)$ solutions de

$$\dot{X}(t) = A(t)X(t)$$

est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel.
C'est un espace vectoriel de dimension finie égale à n : en effet, l'application $\mathbb{K}^n \to \mathcal{E}_{A(\cdot)}$ qui à $X_0 \in \mathbb{K}^n$ associe la solution de

$$\begin{cases} \dot{X}(t) = A(t)X(t) \\ X(t_0) = X_0 \end{cases}$$

est un isomorphisme ; cela découle de la linéarité et du théorème d'existence et d'unicité globales des solutions.

Définition

On appelle résolvante de l'E.D.O. $\dot{X}(t) = A(t)X(t)$ (ou encore de $A(\cdot)$) entre s et t ($s, t \in I$) l'application linéaire $R_A(t,s) \in GL(n, \mathbb{K})$ qui à $v \in \mathbb{K}^n$ associe la valeur au temps t de la solution $X \in \mathcal{E}_{A(\cdot)}$ pour laquelle $X(s) = v$. En d'autres termes,

$$X(\cdot) \in \mathcal{E}_A \iff \forall\, t, s \in I, \quad X(t) = R_A(t,s)X(s).$$

La connaissance de $R(t,s)$ est équivalente à celle d'un système fondamental de solutions (S.F.S.) c.-à-d. d'une base $(X_1(\cdot), \ldots, X_n(\cdot))$ de $\mathcal{E}_A$. En effet, si $V(t)$ est la matrice $n \times n$ dont les colonnes sont les $X_i(\cdot)$, $1 \leqslant i \leqslant n$, on a

$$R_A(t,s) = V(t)V(s)^{-1}.$$

(1) (Chasles) : pour $t_1, t_2, t_3 \in I$ on a

$$R_A(t_3, t_1) = R_A(t_3, t_2)R_A(t_2, t_1)$$

(En particulier, $R(t_1, t_2) = R(t_2, t_1)^{-1}$.)

(2) Pour t_0 fixé, $t \mapsto R_A(t, t_0)$ vérifie l'équation différentielle matricielle (attention l'espace des phases est $M(n, \mathbb{K})$)

$$\begin{cases} \frac{d}{dt} R_A(t, t_0) = A(t)R_A(t, t_0) \\ R_A(t_0, t_0) = I \end{cases}$$

(3) (Cas scalaire) si $n = 1$ (E.D.O. $x'(t) = a(t)x(t)$, $a(\cdot)$, $x(\cdot)$ à valeurs réelles) on a $R(t, t_0) = e^{\int_{t_0}^t a(s)ds}$.

(4) (Cas constant) Si $A(\cdot) \equiv$ *constante* on a $R_A(t, t_0) = e^{(t-t_0)A}$. (cf. Transparents cours 2)

(5) (Liouville) On a

$$\det R(t, t_0) = e^{\int_{t_0}^t \mathrm{tr}(A(s))ds}$$

(6) (Groupes et algèbres de Lie) Soit $U \in GL(n, \mathbb{K})$. Si $A(\cdot)$ est à valeurs dans (l'algèbre de Lie) $\mathfrak{g}_U = \{M \in M(n, \mathbb{K}) : {}^tMU + UM = 0\}$ alors $R_A(\cdot, t_0)$ est à valeurs dans le groupe (de Lie) $G_U = \{P \in GL(n, \mathbb{K}) : {}^tPUP = U\}$.

Equations linéaires dépendant du temps
Propriétés de la résolvante

On ne sait pas en général calculer R_A

Néanmoins :

(7) Si pour tous $t, s \in I$ $A(t)$ et $A(s)$ commutent $R_A(t,t_0) = e^{\int_{t_0}^{t}(A(s))ds}$

(8) On dispose de la formule suivante (peu utile en pratique)

$$\begin{aligned} R_A(t,t_0) &= I + \sum_{n=1}^{\infty} \int_{t_0 \leqslant s_1 \leqslant \cdots \leqslant s_n \leqslant t} A(s_n) \cdots A(s_1) ds_1 \cdots ds_n \\ &= I + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!} \int_{s_1,\ldots,s_n \in [t_0,t]} T(A(s_1) \cdots A(s_n)) ds_1 \cdots ds_n \end{aligned}$$

où $T(A(s_1)\cdots A(s_n)) = A(s_{\sigma(1)})\cdots A(s_{\sigma(n)})$, (produit chronologique) σ étant l'unique permutation des indices $1,\ldots,n$ pour laquelle $s_{\sigma(1)} > \cdots > s_{\sigma(n)}$ (on peut supposer les indices tous distincts).

Equations linéaires dépendant du temps
Variation de la constante

La connaissance de la résolvante permet de résoudre toutes les équations affines c.-à-d. avec un second membre.

$$\begin{cases} \dot{X}(t) = A(t)X(t) + b(t) \\ X(t_0) = X_0 \end{cases}$$

où $A \in C^0(I, M(n,\mathbb{K}))$, $b \in C^0(I,\mathbb{K}^n)$ (I intervalle de $\mathbb{R}$, $t_0 \in I$, $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$).

Equations linéaires dépendant du temps
Variation de la constante

Théorème (Variation de la constante)

On a pour tout t

$$X(t) = R_A(t,t_0)X_0 + \int_{t_0}^{t} R_A(t,s)b(s)ds.$$

Démonstration. En effet si on pose $Y(t) := R_A(t,t_0)^{-1}X(t)$ on a

$$\begin{aligned} Y'(t) &= -R_A(t,t_0)^{-1}R_A'(t,t_0)R_A(t,t_0)^{-1}X(t) + R_A(t,t_0)^{-1}(AX(t)+b(t)) \\ &= -R_A(t,t_0)^{-1}A(t)X(t) + R_A(t,t_0)^{-1}(AX(t)+b(t)) \\ &= R_A(t_0,t)b(t). \end{aligned}$$

d'où

$$X(t) = R_A(t,t_0)\left(X_0 + \int_{t_0}^{t} R_A(t_0,s)ds\right)$$

□

Sommaire Plan du cours 3

Théorie des perturbations (cas linéaire)

Le problème : Etant donnée $A_\epsilon(\cdot) \in C^0(I, M(n,\mathbb{K}))$ proche de $A_0(\cdot) \in C^0(I, M(n,\mathbb{K}))$ (I intervalle borné) dont on connaît la résolvante R_{A_0}, estimer la résolvante R_{A_ϵ} ; ou encore étudier la solution $X(\epsilon, \cdot)$ de

$$\begin{cases} \dot{X}(t) = A_\epsilon(t)X(t) + b_\epsilon(t) \\ X(0) = v_0 \end{cases}$$

(on suppose $t_0 = 0$).
D'après la formule de la résolvante, il suffit dans un premier temps d'étudier le problème linéaire où $b_\epsilon = 0$.
Pour simplifier l'analyse, nous supposons que $A_\epsilon(\cdot) = A_0 + \epsilon F(\cdot)$ où $F(\cdot) \in C^0(I, M(n,\mathbb{K}))$ et A_0 est constante ; ϵ étant un petit paramètre réel.

Application à la méthode des perturbations

D'après le théorème de dépendance différentiable (cas linéaire), ou la formule donnant la résolvante sous forme de sommes d'intégrales itérées, nous savons que $\epsilon \mapsto R_A(\cdot, 0)$, $\mathbb{R} \to C^0(I, M(n,\mathbb{K}))$ est C^∞ et même analytique.
Par conséquent, on peut écrire un développement limité

$$R_{A_\epsilon}(t,0) = R_{A_0}(t,0) + \epsilon Y_1(t) + \cdots + \epsilon^k Y_k(t) + O(\epsilon^{k+1}, t)$$

où $\|O(\epsilon^{k+1}, \cdot)\|_{C^0(I)} \leqslant \text{cste} \cdot \epsilon^{k+1}$.

Théorie des perturbations (cas linéaire)

Le but de la théorie des perturbations est de déterminer les fonctions $Y_1(\cdot), \ldots, Y_k(\cdot)$.
Pour cela :

- On injecte

$$R_{A_\epsilon}(t,0) = R_{A_0}(t,0) + \epsilon Y_1(t) + \cdots + \epsilon^k Y_k(t) + O(\epsilon^{k+1}, t)$$

dans

$$\begin{cases} \dot{R}_{A_\epsilon}(t,0) = (A_0 + \epsilon F(t))R_{A_\epsilon}(t,0) \\ R_{A_\epsilon}(0,0) = I \end{cases}$$

- et on utilise le fait qu'un développement limité est unique.

Théorie des perturbations (cas linéaire)
Exemple

$$\begin{aligned} &A_0 e^{tA_0} + \epsilon \dot{Y}_1(t) + \cdots + \epsilon^k \dot{Y}_k(t) + \dot{O}(\epsilon^{k+1}, t) \\ &\qquad = (A_0 + \epsilon F(t))(e^{tA_0} + \epsilon Y_1(t) + \cdots + \epsilon^k Y_k(t) + O(\epsilon^{k+1}, t) \end{aligned}$$

d'où en regroupant en puissance de ϵ

$$\begin{aligned} &\epsilon\Big(\dot{Y}_1(t) - A_0 Y_1(t) - F(t)e^{tA_0}\Big) + \epsilon^2\Big(\dot{Y}_2(t) - A_0 Y_1(t) - F(t)Y_1(t)\Big) + \\ &\qquad \cdots + \epsilon^k\Big(\dot{Y}_k(t) - A_0 Y_k(t) - F(t)Y_{k-1}\Big) = O(\epsilon^{k+1}, t) \end{aligned}$$

avec $\|O(\epsilon^{k+1}, \cdot)\|_{C^0(I)} \leqslant \text{cste} \cdot \epsilon^{k+1}$.

Théorie des perturbations (cas linéaire)

Par conséquent (unicité du D.L.)

$$\dot{Y}_1(t) - A_0 Y_1(t) - F(t)e^{tA_0} = 0$$
$$\dot{Y}_2(t) - A_0 Y_2(t) - F(t)Y_1(t)) = 0$$
$$\vdots$$
$$\dot{Y}_k(t) - A_0 Y_k(t) - F(t)Y_{k-1}(t) = 0$$

De même on doit avoir

$$I = R_{A_\epsilon}(0,0) = I + \epsilon Y_1(0) + \cdots + \epsilon^k Y_k(0) + O(\epsilon^{k+1})$$

si bien que $Y_1(0) = \cdots = Y_k(0) = 0$.

Théorie des perturbations (cas linéaire)

On trouve donc Y_1 en résolvant l'équation différentielle matricielle (attention l'espace des phases est $M(n, \mathbb{K})$)

$$\begin{cases} \dot{Y}_1(t) = A_0 Y_1(t) + F(t)e^{tA_0} \\ Y_1(0) = 0 \end{cases}$$

qui se résout par la méthode de variation de la constante ;
Puis, connaissant Y_1 on résout

$$\begin{cases} \dot{Y}_2(t) = A_0 Y_2(t) + F(t)Y_1(t) \\ Y_2(0) = 0 \end{cases}$$

et ainsi de suite.

Théorie des perturbations (cas linéaire)

Remarque :
Il est parfois plus commode pour les calculs de faire la théorie des perturbations directement sur l'équation

$$\begin{cases} \dot{X}(t) = A_\epsilon(t)X(t) + b_\epsilon(t) \\ X(0) = v_0 \end{cases}$$

Sommaire Plan du cours 3

E.D.O. linéaires périodiques

On suppose à présent que $A(\cdot) \in C^0(I, M(n, \mathbb{K}))$ est T-périodique, c.-à-d.

$$A(\cdot + T) = A(\cdot)$$

et on se propose de voir dans quelle mesure cette information supplémentaire nous renseigne sur la résolvante de $\dot{X}(t) = A(t)X(t)$.

E.D.O. linéaires périodiques
Propriétés de la résolvante

Théorème

Si $A(\cdot)$ est T-périodique alors,

i) *pour tous $t_1, t_2 \in \mathbb{R}$ on a ,*

$$R_A(t_2 + T, t_1 + T) = R_A(t_2, t_1);$$

ii) *pour tout $t \in \mathbb{R}$,*

$$R_A(t + T, t) = R_A(t, 0)R(T, 0)R_A(t, 0)^{-1}.$$

E.D.O. linéaires périodiques
Propriétés de la résolvante

Démonstration

Montrons i) : Soient $v \in \mathbb{K}^n$, $X(\cdot)$ la solution de $X'(t) = A(t)X(t)$ telle que $X(t_1) = v$ et $Y(\cdot) := X(\cdot - T)$:

$$\begin{aligned} Y'(t) &= X'(t - T) = A(t - T)X(t - T) \\ &= A(t)Y(t) \quad (A \text{ est } T\text{-périodique.}) \end{aligned}$$

Donc $X(\cdot), Y(\cdot) \in \mathcal{E}_A$.

$$\begin{aligned} X(t_2) &= R_A(t_2, t_1)X(t_1) = R_A(t_2, t_1).v \\ Y(t_2 + T) &= R_A(t_2 + T, t_1 + T).Y(t_1 + T) = R_A(t_2 + T, t_1 + T).v \end{aligned}$$

$$X(t_2) = Y(t_2 + T) \Longrightarrow R_A(t_2, t_1).v = R_A(t_2 + T, t_1 + T).v$$

C'est vrai pour tout v donc $R_A(t_2, t_1) = R_A(t_2 + T, t_1 + T)$

E.D.O. linéaires périodiques
Propriétés de la résolvante

Montrons ii) : on a

$$R_A(t + T, t) = R_A(t + T, T).R(T, 0).R(0, t),$$

d'après i)

$$R_A(t + T, T) = R_A(t, 0),$$

d'où

$$\begin{aligned} R_A(t + T, t) &= R_A(t, 0).R(T, 0).R(0, t) \\ &= R_A(t, 0).R(T, 0).R_A(t, 0)^{-1}. \end{aligned}$$

$\square$

Théorème (de Floquet)

Soit $A \in C^k(\mathbb{R}, M_n(\mathbb{K}))$ T-périodique. Il existe alors une matrice $A_0 \in M_n(\mathbb{K})$ et une fonction $P \in C^k(\mathbb{R}, Gl(n,\mathbb{K}))$ T-périodique si $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ (resp. $2T$-périodique si $\mathbb{K} = \mathbb{R}$) telles que pour tous $t, t_0 \in \mathbb{R}$,

$$R_A(t,0) = P(t)e^{tA_0}.$$

On a

$$e^{TA_0} = R_A(T,0), \qquad (\text{resp. } e^{2TA_0} = R_A(2T,0)).$$

Démonstration

En utilisant la décomposition $S + N$ on peut démontrer que pour toute matrice $R \in GL(n,\mathbb{C})$ (resp. $R \in GL(n,\mathbb{R})$) (inversible) il existe $A \in M(n,\mathbb{C})$ telle que $e^A = R$ (resp. $e^{2A} = R^2$).
Supposons $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ (le cas $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ est similaire). Il existe A_0 tel que $e^{A_0} = R(T,0)$.
Posons $P(t) = R(t,0)e^{-tA}$.
$P(\cdot)$ est T-périodique :

En effet,

$$\begin{aligned} P(t+T) &= R(t+T,0)e^{-(t+T)A} \\ &= R(t+T,T)R(T,0)e^{-TA}e^{-tA} \\ &= R(t,0)R(T,0)e^{-TA}e^{-tA} \\ &= R(t,0)e^{-tA} \\ &= P(t) \end{aligned}$$

$\square$

Remarques :

- L'expression $R_A(t,0) = P(t)e^{tA_0}$ signifie que $X(\cdot)$ est solution de $X'(t) = A(t)X(t)$ ssi $Y(\cdot) = P(\cdot)^{-1}X(\cdot)$ est solution de l'équation linéaire à coefficients *constants* $Y'(t) = A_0 Y(t)$.
- Si $A(\cdot)$ est à valeurs dans $sl(2,\mathbb{R})$ tout ce qui précède reste vrai en remplaçant $M_n(\mathbb{R})$ par $sl(2,\mathbb{R})$ et $Gl(n,\mathbb{R})$ par $SL(2,\mathbb{R})$.
- Une conséquence de Floquet et de ce que l'on a vu sur les E.D.O à coff. constants est que l'on peut décrire la forme des solutions d'une EDO à coefficients périodiques :

E.D.O. linéaires périodiques
Le théorème de Floquet

Proposition

Les coefficients de toute solution d'une équation $\dot{X}(t) = A(t)X(t)$ où $A(\cdot)$ est T-périodique sont des sommes finies de fonctions de la forme $a_{p,q}(t)t^p e^{t\lambda_q}$ où $a(\cdot)$ est T-périodique (à valeurs complexes) , $0 \leqslant p \leqslant n$ et λ_q sont les valeurs propres de A_0 (les exposants de Floquet).

Sommaire Plan du cours 3

La résonance paramétrique
Stabilité des E.D.O. périodiques linéaires

Problème : On considère $A(\cdot) \in C^0(I, M(n, \mathbb{K}))$, T-périodique ($A(\cdot + T) = A(\cdot)$) et on se propose d'étudier la stabilité du système

$$\dot{X}(t) = A(t)X(t).$$

L'origine est-elle

- asymptotiquement stable (en $t \to +\infty$) ? : pour tout $X(0)$ dans un voisinage de 0 $\lim_{t\to\infty} X(t) = 0$?
- stable ? c'est-à-dire $\forall \epsilon > 0, \exists \delta, |X(0)| < \delta \implies \forall t \geqslant 0, |X(t)| < \epsilon$?
- instable ? Pour certaines conditions initiales arbitrairement proches de 0, les solutions sortent de tout voisinage de 0 prescrit à l'avance.

La résonance paramétrique
Stabilité des E.D.O. périodiques linéaires

D'après le théorème de Floquet on sait qu'il existe

- $A_0 \in M(n, \mathbb{K})$ telle que $e^{TA_0} = R_A(T, 0)$ si $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ (resp. $e^{2TA_0} = R_A(2T, 0)$)
- $P \in C^1(\mathbb{R}, GL(n, \mathbb{K}))$, T-périodique si $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ (resp. $2T$-périodique si $\mathbb{K} = \mathbb{R}$)

telles que

$$R_A(t, 0) = P(t)e^{tA_0}.$$

Ainsi

$$X(t) = P(t)e^{tA_0}X(0).$$

Comme $P(\cdot)$ est périodique et inversible on a

$$\sup_{t\in\mathbb{R}} \max(\|P(t)\|, \|P(t)^{-1}\|) < \infty$$

et donc

$$\lim_{t\to\infty} X(t) = 0 \iff X(0) \in \Gamma^s(A_0)$$
$$\lim_{t\to-\infty} X(t) = 0 \iff X(0) \in \Gamma^u(A_0)$$
$$\exists\ M,\ C,\ \forall\ t,\ \|X(t)\| \leqslant C(1+|t|)^M\|X(0)\| \iff X(0) \in \Gamma^c(A_0)$$

où $\mathbb{K}^n = \Gamma^s(A_0) \oplus \Gamma^u(A_0) \oplus \Gamma^c(A_0)$, $\Gamma^{s,u,c}(A_0)$ étant les espaces stable, instable, central de A_0.

La stabilité du système $\dot{X}(t) = A(t)X(t)$ se lit donc sur A_0 ou de façon équivalente sur $R_A(T,0)$ (ou plus précisément sur leurs valeurs propres) :

- 0 est asymptotiquement stable (en $t \to +\infty$) $\iff$ $\Gamma_u(A_0) = \Gamma_c(A_0) = \emptyset \iff$ toutes les valeurs propres de A_0 sont de parties réelles strictement négatives.
- 0 est stable (en $t \to +\infty$) $\iff \Gamma_u(A_0) = \emptyset$ et $M = 0 \iff$ toutes les valeurs propres de A_0 sont de partie réelle négative et A_0 et diagonalisable en celles de partie réelle nulle.
- 0 est instable $\iff$ A_0 a au moins valeur propre de partie réelle positive ou une valeur propre de partie réelle nulle où elle n'est pas diagonalisable.

Comme $e^{TA_0} = R_A(T,0)$ (ou $e^{2TA_0} = R(T,0)^2$), les valeurs propres ρ_i de $R_A(T,0)$ son reliées à celles λ_i de A_0 par la relation

$$e^{T\lambda_i} = \rho_i.$$

Proposition

- *0 est asymptotiquement stable (en $t \to +\infty$) $\iff$ toutes les valeurs propres de $R_A(T,0)$ sont de module < 1.*
- *0 est stable (en $t \to +\infty$) $\iff$ toutes les valeurs propres de $R_A(T,0)$ sont de module $\leqslant 1$ et $R_A(T,0)$ est diagonalisable en celles de module 1.*
- *0 est instable $\iff$ au moins une des valeurs propres de $R_A(T,0)$ est de module > 1 ou est de module 1 mais $R_A(T,0)$ n'y est pas diagonalisable.*

Si l'on suppose à présent que A_ϵ dépend continûment (ou C^k) d'un paramètre $\epsilon \in (-\epsilon_0, \epsilon_0)$, par exemple

$$A_\epsilon(\cdot) = A + \epsilon F(\cdot), \quad A = cste, \quad F(\cdot + T) = F(\cdot).$$

On sait alors, d'après le théorème de dépendance par rapport au paramètre, que $R_{A_\epsilon}(T,0)$ dépend continûment (ou C^k) de ϵ.
Or, les valeurs propres d'une matrice dépendent continûment de la matrice. Donc, les propriétés "R_{A_ϵ} a toutes ses valeurs propres de module < 1" ou "R_{A_ϵ} a au moins une valeur propre de module > 1" sont ouvertes (ont lieu pour un ensemble ouvert de paramètres).
Conclusion :

Proposition

Les propriétés "être asymptotiquement stable" ou "être instable" sont robustes c'est-à-dire ouvertes dans l'espace des paramètres.

Qu'en est-il de la stabilité ? : En général, on ne peut rien dire.
Mais, dans les problèmes qui proviennent de la Physique, les E.D.O. que l'on obtient ont souvent une structure supplémentaire ("hamiltonienne") liée à la conservation de l'énergie et les matrices qui apparaissent sont "symplectiques".
L'exemple le plus simple de matrices symplectiques se trouve en dimension 2 : ces matrices s'identifient à l'ensemble des matrices 2×2 à coefficients réels et de trace nulle $sl(2, \mathbb{R})$ (resp. de déterminant 1 : $SL(2, \mathbb{R})$).

Les v.p. de $R \in SL(2, \mathbb{R})$ sont racines de $\rho^2 - \mathrm{tr}(R)\rho + 1 = 0$.
Discriminant $\Delta = \mathrm{tr}(R)^2 - 4$.
On définit

- $E_s(R) := \{v \in \mathbb{R}^2 : \lim_{n \to \infty} \|R^n \cdot v\| = 0\}$
- $E_u(R) := \{v \in \mathbb{R}^2 : \lim_{n \to -\infty} \|R^n \cdot v\| = 0\}$
- $E_c(R) := \{v \in \mathbb{R}^2 : \exists C \ \forall n \in \mathbb{R}, \ \|R^n \cdot v\| \leqslant C(1 + |n|)\|v\|\}$.

Si $|\mathrm{tr}(R)| < 2$:

- deux v.p. sur le cercle unité $e^{\pm i\omega}$
- $\mathbb{R}^2 = \Gamma_c(R)$;
- toutes les orbites se situent sur des ellipses : R est elliptique.
- L'origine est stable.
- Il existe $P \in GL(2, \mathbb{R})$ tel que $R = P \begin{pmatrix} \cos\omega & -\sin\omega \\ \sin\omega & \cos\omega \end{pmatrix} P^{-1}$
- Il existe $A \in sl(2, \mathbb{R})$, $\det A > 0$ telle que $R = e^A$

Si $|\mathrm{tr}(R)| > 2$:

- deux v.p. réelles inverses l'une de l'autre $e^{\pm\omega}$;
- $\mathbb{R}^2 = \Gamma_s(A) \oplus \Gamma_u(A)$ où $\Gamma_s = \mathbb{R}v_s$, $\Gamma_u = \mathbb{R}v_u$.
- Les orbites se situent sur des hyperboles : R est hyperbolique
- L'origine est instable.
- Il existe $P \in GL(2, \mathbb{R})$ tel que $R = P \begin{pmatrix} e^{\omega} & 0 \\ 0 & e^{-\omega} \end{pmatrix} P^{-1}$
- Il existe $A \in sl(2, \mathbb{R})$, $\det A < 0$ telle que $R^2 = e^{2A}$

Equations linéaires à coefficients constants

Exemples en dimension 2

Si $|\mathrm{tr}(R)| = 2$:

- deux v.p. égales à 1 ou égales à -1 ;
- $\mathbb{R}^2 = \Gamma_c(A)$ mais R est unipotente d'ordre 2 ou égale à $\pm Id$
- R est dite parabolique
- L'origine est instable si $a \neq 0$ (stable sinon).
- Il existe $P \in GL(2,\mathbb{R})$ et $a \in \mathbb{R}$ tels que $R = P \begin{pmatrix} \pm 1 & a \\ 0 & \pm 1 \end{pmatrix} P^{-1}$
- Il existe $A \in sl(2,\mathbb{R})$, $\det A = 0$ telle que $R^2 = e^{2A}$

La résonance paramétrique

Stabilité des E.D.O. périodiques linéaires

Comme $R_A(T,0) = e^{TA}$ ou $R_A(T,0)^2 = e^{2TA}$ on a donc

Théorème

Le système $X'(t) = A(t)X(t)$ avec $A(\cdot + T) = A(\cdot)$, $A(\cdot)$ à valeurs dans $sl(2,\mathbb{R})$, est stable si et seulement si il est elliptique $|tr(R_A(T,0)| < 2$ ou si $R_A(T,0) = \pm I$.

La résonance paramétrique

Stabilité des E.D.O. périodiques linéaires

La nouveauté dans le cas où $A(\cdot)$ est à valeurs dans $sl(2,\mathbb{R})$: est

Théorème

L'ensemble des matrices elliptiques de $SL(2,\mathbb{R})$ est ouvert dans $SL(2,\mathbb{R})$.

On a donc par le théorème de dépendance continue par rapport aux paramètres :

Corollaire

L'ensemble des $A \in C^0_{T-per}(\mathbb{R}, sl(2,\mathbb{R}))$ pour lesquels $X'(t) = A(t)X(t)$ est elliptique est ouvert (dans $C^0_{T-per}(\mathbb{R}, sl(2,\mathbb{R}))$).

La résonance paramétrique

Stabilité des E.D.O. périodiques linéaires

Conséquences pour

$A_\epsilon(\cdot) = A + \epsilon F(\cdot), \quad A = cste, \quad F(\cdot + T) = F(\cdot) \qquad (PP)_\epsilon$:

- Si $e^{TA} \in SL(2,\mathbb{R})$ est hyperbolique ($|\mathrm{tr}(e^{TA})| > 2$), l'origine reste un point d'équilibre instable du système $(PP)_\epsilon$ pour ϵ assez petit.
- Si $e^{TA} \in SL(2,\mathbb{R})$ est elliptique ($|\mathrm{tr}(e^{TA})| < 2$), l'origine reste un point d'équilibre stable du système $(PP)_\epsilon$ pour ϵ assez petit.
- Si $e^{TA} \in SL(2,\mathbb{R})$ est parabolique ($|\mathrm{tr}(e^{TA})| < 2$) : tout peut arriver !

La résonance paramétrique
Exemples

Considérons

$$\ddot{x}(t) + (a + \epsilon \cos(\frac{2\pi t}{T})x(t) = 0,$$

qui se récrit

$$\dot{X}(t) = (A + \epsilon F(t))X(t)$$

avec

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -a & 0 \end{pmatrix}, \qquad F(t) = \epsilon \cos(\frac{2\pi t}{T}) \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Si $a > 0$ on écrit $a = \omega^2$ et on a

$$e^{tA} = \begin{pmatrix} \cos(t\omega) & \frac{\sin(t\omega)}{\omega} \\ -\omega \sin(t\omega) & \cos(t\omega) \end{pmatrix}$$

La résonance paramétrique
Exemples

Donc

Proposition (Résonance paramétrique)

$$e^{TA} \textit{ elliptique } \iff |tr(e^{TA})| < 2 \iff \omega \notin \frac{\pi}{T}\mathbb{Z}$$

et dans ce cas il existe $\epsilon_\omega > 0$ tel que pour tout $\epsilon \in (-\epsilon_\omega, \epsilon_\omega)$ le système associé à $A + \epsilon F(\cdot)$ est stable.

En revanche, si $\omega = \omega_k := k\frac{\pi}{T}$ (on dit que le système est résonant), la méthode des perturbations, permet de calculer le développement limité de $R_{A_\epsilon}(T, 0)$ et donc de sa trace et de montrer qu'il existe dans le plan (ω, ϵ) une zone d'instabilité d'intérieur non vide dont l'adhérence contient $(\omega_k, 0)$.

La résonance paramétrique
Exemples

Pour $\ddot{x} + (a + \epsilon \cos(2t))x = 0$ ($T = \pi$, $a = \omega^2$ si $a > 0$).
Rouge : instable (hyperbolique) Bleu : parabolique Orange : stable (elliptique)

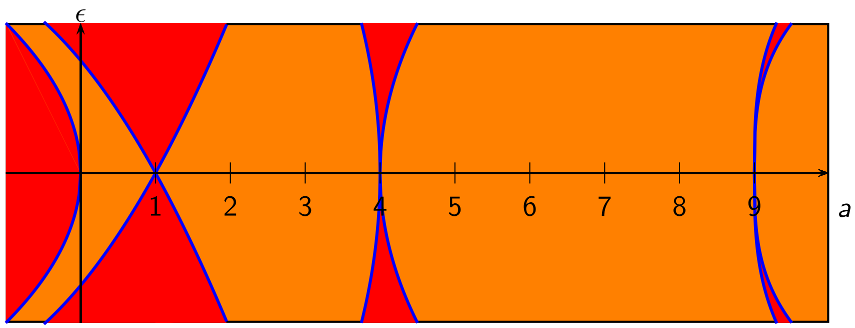

FIGURE: Zones de stabilité-instabilité

La résonance paramétrique
Exemples de la Physique

- Pendule de Kapitsa : pendule inversé dont le point d'attache oscille périodiquement (oscillations de faible amplitude mais rapides) ; après changement de variables on peut se trouver dans une zone de stabilité $a < 0$ et ϵ petits.
- Piégeage des ions (Nobel 1989, Dehmelt, Paul) : Dans un champ électrique (quadrupôle) oscillant : même principe que le pendule de Kapitsa.
- Propriétés métal-isolant (physique du solide) : Equation stationnaire de Schrödinger 1D, potentiel périodique. $-\psi''(x) + V(x)\psi(x) = E\psi(x)$. Les solutions physiquement acceptables sont celles pour lesquelles ψ est bornée. Le spectre de l'opérateur associé a une structure de bandes.