MAT431 Equations différentielles et Systèmes dynamiques

Raphaël KRIKORIAN

25 août 2011

Sommaire Plan du cours 2

Plan du cours 2

Lire : chapitre 2 de [V] sections 1 et 2 (la section 3 est également intéressante) et chapitre 3 de [V], sections 1 et 6.

1. Rappels sur le théorème du point fixe de Picard
2. Théorèmes d'existence et d'unicité
    - Théorème de Cauchy-Lipschitz
    - Unicité globale
    - Critère d'existence globale
3. E.D.O. linéaires
4. E.D.O. linéaires à coefficients constants
    - L'exponentielle
    - Espaces stable, instable et neutre
    - Stabilité
    - Exemples en dimension 2

Sommaire Plan du cours 2

Rappels sur le Théorème du point fixe de Picard

Théorème (du point fixe de Picard)

Supposons que (A, d) soit complet et soit $T : A \to A$ une application ρ-contractante ($0 \leqslant \rho < 1$). Alors T admet un unique point fixe $x \in A$ (i.e. $T(x) = x$). Pour tout $x_0 \in A$ la suite $T^i(x_0)$ converge vers x.

Remarque : Pour obtenir les mêmes conclusions, il suffit de supposer qu'il existe n pour lequel T^n soit contractante : appliquons en effet le théorème précédent à T^n ; si $T^n(x) = x$ alors $T^n(T(x)) = T(T^n(x)) = T(x)$. D'après l'unicité, $T(x) = x$. Ce point fixe pour T est unique car tout point fixe de T est point fixe de T^n.

Rappels sur le Théorème du point fixe de Picard

Théorème de Picard à paramètre, version C^0 et lipschitz

Théorème (Picard à paramètre (version C^0 et lipschitz))

Soient (A, d) un espace métrique complet, Λ un espace métrique et $0 \leqslant \rho < 1$. Soit $T : A \times \Lambda \to A$ telle que pour tout $\lambda \in \Lambda$ l'application $T(\cdot, \lambda) : A \to A$ soit ρ-contractante. Alors, si T est continue, pour tout $\lambda \in \Lambda$ il existe un unique point fixe $x(\lambda)$ de $T(\cdot, \lambda)$ et l'application $x(\cdot) : \Lambda \to A$ est continue ; si en outre pour tout $x \in A$ fixé l'application $T(x, \cdot) : \Lambda \to A$ est C-lipschitzienne, l'application $x : \Lambda \to A$ est $C/(1-\rho)$-lipschitzienne.

Rappels sur le Théorème du point fixe de Picard

Théorème de Picard à paramètre (version C^k)

Théorème (Picard à paramètre, version C^k)

Soient $A \subset U \subset E$, U ouvert et A fermé du Banach E, $\Lambda \subset F$, Λ ouvert de l'EVN F ; soit en outre $0 \leqslant \rho < 1$. Supposons que $T : U \times \Lambda \to E$ soit de classe C^k ($k \geqslant 1$), envoie $A \times \Lambda$ dans A et que : (a) pour tout $\lambda \in \Lambda$, l'application $T(\cdot, \lambda) : A \to A$ est ρ-contractante et : (b) pour tout $(x, \lambda) \in U \times \Lambda$ on a $\|D_x T(x, \lambda)\| \leqslant \rho$. Alors, pour tout $\lambda \in \Lambda$ il existe un unique point fixe $x(\lambda)$ de $T(\cdot, \lambda)$ et l'application $x(\cdot) : \Lambda \to A$ est C^k et on a

$$Dx(\lambda) = -(D_x T(x(\lambda), \lambda) - Id)^{-1} D_\lambda T(x(\lambda), \lambda).$$

Remarque : C'est une version corrigée par rapport au Cours 1

- La condition (b) n'implique (a) que si U est convexe.
- On peut remplacer la condition (a) par : pour tout $\lambda \in \Lambda$ il existe un unique point fixe $x(\lambda)$ de $T(\cdot, \lambda)$ et l'application $\lambda \mapsto x(\lambda)$ est continue.

Sommaire Plan du cours 2

Théorème de Cauchy-Lipschitz
Cadre

- E un espace de Banach (i.e. un espace vectoriel normé complet) muni d'une norme $\|\cdot\|$: l'espace des phases (p. ex. $\mathbb{R}^n$ ou esp. dim. infinie).
- I un intervalle de $\mathbb{R}$, $t_0 \in I$ tel que $(t_0, y_0) \in \Omega$.
- Ω ouvert de $\mathbb{R} \times E$ contenant (t_0, y_0).
- $f : \Omega \subset \mathbb{R} \times E \to E$ une application continue

Problème de Cauchy (*i.e. satisfaisant une condition initiale*) : Trouver $y : I \to E$ (C^1) vérifiant l'équation différentielle ordinaire (E.D.O.) :

$$\forall t \in I, \ y'(t) = f(t, y(t)), \tag{1}$$

et satisfaisant la condition initiale : $y(t_0) = y_0 \qquad (1')$

Théorème de Cauchy-Lipschitz
Cadre

Les E.D.O. de degré $k \geqslant 2$ se ramènent à des $E.D.O.$ d'ordre 1 quitte à agrandir l'espace des phases : si $x : I \to E$,

$$\frac{d^k x}{dt^k}(t) = g(t, x(t), \ldots, \frac{d^{k-1}x}{dt^{k-1}}(t)) \tag{2}$$

se ramène à

$$y'(t) = f(t, y(t)) \tag{3}$$

où $y = (y_1, \ldots, y_k) \in E^k$:

Théorème de Cauchy-Lipschitz
Cadre

$$\begin{cases} \dot{y}_1 & = y_2 \\ \dot{y}_2 & = y_3 \\ \vdots & = \vdots \\ \dot{y}_{k-1} & = y_{k-2} \\ \dot{y}_k & = g(t, y_1(t), \ldots, y_{k-1}(t)) \end{cases} \tag{4}$$

$x(\cdot)$ est solution de (2) si et seulement si $(x(\cdot), \frac{dx}{dt}(\cdot), \ldots, \frac{d^{k-1}x}{dt^{k-1}}(\cdot))$ est solution de (4)

Théorème de Cauchy-Lipschitz
Fonctions lipschitzienne

Si $f : \Omega \subset \mathbb{R} \times E \to E$ continue, nous dirons que f est localement (uniformément) lipschitzienne sur Ω (par abus de langage nous sous-entendons "en y") si pour tout $(t_0, y_0) \in \Omega \subset \mathbb{R} \times E$ il existe un voisinage $W \subset \Omega$ de (t_0, y_0) et une constante K_W tels que pour tous (t, y_1), (t, y_2) dans W

$$\|f(t, y_1) - f(t, y_2)\| \leqslant K_W \|y_1 - y_2\|.$$

Nous notons $f \in \mathrm{Lip}_{loc}(\Omega, E)$.

Si f est C^1 en y cette condition est automatiquement satisfaite.

Théorème de Cauchy-Lipschitz
Existence et unicité locales

Théorème (de Cauchy-Lipschitz)

Supposons f localement lipschitzienne sur Ω et soit $(t_0, y_0) \in \Omega$. Alors il existe $\delta > 0$ tel que le problème de Cauchy

$$\begin{cases} \dot{y}(t) &= f(t, y(t)) \\ y(t_0) &= y_0 \end{cases} \tag{5}$$

admet une solution unique définie sur $(t_0 - \delta, t_0 + \delta)$.

Théorème de Cauchy-Lipschitz
Preuve

Démonstration : Théorème du point fixe de Picard.
On choisit δ et a de façon que $W_{\delta,a} := [t_0 - \delta, t_0 + \delta] \times \overline{B(y_0, a)} \subset \Omega$, on note $M = \sup_{W_{\delta,a}} |f| < \infty$ (cette quantité est bien finie si δ, a sont suffisamment petits car f est continue en (t_0, y_0)) et $K_{W_{\delta,a}}$ une constante de Lipschitz de f (au sens de la définition précédente) valide sur $W_{\delta,a}$.
On définit

$$\begin{aligned} \mathcal{T} : C^0([t_0 - \delta, t_0 + \delta], \overline{B(y_0, a)}) &\to C^0([t_0 - \delta, t_0 + \delta], \overline{B(y_0, a)}) \\ y(\cdot) &\mapsto y_0 + \int_{t_0}^{\cdot} f(s, y(s))ds \end{aligned}$$

$$\mathcal{T}(y(\cdot)) = y(\cdot) \quad \text{si et seulement si} \quad \begin{cases} \dot{y} &= f(t, y(t)) \\ y(t_0) &= y_0 \end{cases}$$

Théorème de Cauchy-Lipschitz
Preuve

$\mathcal{T}$ envoie bien $C^0([t_0 - \delta, t_0 + \delta], \overline{B(y_0, a)})$ dans lui-même si δ est suffisamment petit (p.ex. $\delta M < a$) : en effet

$$\|\mathcal{T}(y(\cdot))(t) - y_0\| \leqslant \delta M.$$

$\mathcal{T}$ est contractante si δ est suffisamment petit (p.ex. $\delta K_{W_{\delta,a}} < 1/2$) :

$$\begin{aligned} \|\mathcal{T}(u(\cdot)) - \mathcal{T}(v(\cdot))\| &\leqslant \delta \sup_{s \in [t_0 - \delta, t_0 + \delta]} \|f(s, u(s)) - f(s, v(s))\| \\ &\leqslant \delta K_{W_{\delta,a}} \sup_{[t_0 - \delta, t_0 + \delta]} \|u(\cdot) - v(\cdot)\| \end{aligned}$$

□

Théorème de Cauchy-Lipschitz
Remarques

- Si $L \subset \Omega$ est un compact, la taille de l'intervalle de définition de la solution de condition initiale $(t_0, y_0) \in L$ est minorée par une constante qui ne dépend que de L (et continûment de $f \in \mathrm{Lip}_{loc}(\Omega, E)$ muni de la topologie "compact-ouvert" : f_n converge vers f pour cette topologie si et seulement si sur tout compact f_n converge vers f uniformément et $Lip(f_n - f) \to 0$).
- Le théorème de Picard à paramètre montre que si f dépend de façon C^k d'un paramètre, les solutions locales (ou pas : *cf.* plus bas) obtenues dépendent C^k de ce paramètre ;

- Si f est seulement continue, le théorème de Peano affirme que la partie existence du théorème de Cauchy-Lipschitz est vraie. En revanche, il n'y a plus nécessairement unicité.
Exemple : l'équation différentielle, $y' = \sqrt{(|y|)}$, admet sur $(0, \infty)$ les fonctions $x \mapsto 0$ et $x \mapsto \frac{x^2}{4}$ comme solutions vérifiant $y(0) = 0$.

Théorème de Cauchy-Lipschitz
Unicité globale

Théorème

Si f est localement lipschitzienne sur Ω, et si $y_1(\cdot), y_2(\cdot)$ sont deux solutions de $y'(t) = f(t, y(t))$, $y(t_0) = y_0$, définies sur le même intervalle I alors elles sont égales.

Démonstration. Notons J l'ensemble des points $t \in I$ pour lesquels $y_1(t) = y_2(t)$. Cet ensemble J est non vide (il contient t_0). L'unicité locale donnée par Cauchy-Lipschitz démontre que cet ensemble est ouvert. Il est également fermé (dans I) : si $t_n \in J$ converge vers $t_* \in I$ alors $y_1(t_*) = y_2(t_*)$. Comme $I = J \cup (I \setminus J)$, $J \neq \emptyset$ et que I est connexe on doit avoir $I \setminus J = \emptyset$. $\square$

Théorème de Cauchy-Lipschitz
Existence globale

- Les solutions d'un problème de Cauchy $y'(t) = f(t, y(t))$, $y(t_0) = y_0$ ne sont pas toujours définies sur I tout entier.
Exemples : $y'(t) = 1 + y^2(t)$ admet pour solution $y(t) = \arctan(t)$ qui "explose" en $t \in (\pi/2) + \pi\mathbb{Z}$.
- Notion de temps de vie des solutions, intervalle maximal (voir plus loin)

Théorème de Cauchy-Lipschitz
Existence globale

En anticipant sur le cours 4 :

Théorème (Critère d'existence globale)

Si f est définie sur $I \times E$ et est à "croissance affine à l'infini" (en particulier si f est affine) dans le sens suivant : il existe $a : I \to \mathbb{R}$, $b : I \to \mathbb{R}$ continues telles que

$$\|f(t, y)\| \leqslant a(t)\|y\| + b(t)$$

alors $y'(t) = f(t, y(t))$, $y(t_0) = y_0$ ($t_0 \in I$) admet une unique solution définie sur I tout entier.

Sommaire Plan du cours 2

Equations linéaires

Résultats généraux

Supposons à présent $\Omega = I \times E$ et $f(t, y) = A(t)y + b(t)$ où $A(\cdot) : I \to \mathcal{L}_c(E, E)$ et $b : I \to E$ continues, I : intervalle.

Théorème (Existence et Unicité globales dans le cas affine)

Avec les notations précédentes, pour tout $t_0 \in I$ et tout $X_0 \in E$, il existe une unique solution $X(\cdot) \in C^1(I, E)$ (définie sur I tout entier) de

$$\begin{cases} \dot{X}(t) = A(t)X(t) + b(t) \\ X(t_0) = X_0 \end{cases}$$

En outre, si I est borné, l'application $C^0(I, \mathcal{L}_c(E, E)) \times C^0(I, E) \times E \to C^0(I, E)$ qui à $(A(\cdot), b(\cdot), X_0)$ associe $X(\cdot)$ est continue (en fait C^∞).

Equations linéaires

Résultats généraux

Démonstration On applique la version modifiée du théorème de Picard à

$$\begin{aligned} \mathcal{T} : C^0(I, E) &\to C^0(I, E) \\ X(\cdot) &\mapsto X_0 + \int_{t0}^{\cdot} A(s) \cdot X(s) + b(s) ds \end{aligned}$$

$\mathcal{T}$ n'est pas nécessairement contractante mais un de ses itérés l'est :

$$\|(\mathcal{T}(X_1)(t) - \mathcal{T}(X_2)(t)\| \leqslant \int_{t_0}^{t} \|A(s)\| \|(X_1 - X_2)(s)\| ds \qquad (*)$$

et donc

$$\|(\mathcal{T}(X_1)(t) - \mathcal{T}(X_2)(t)\| \leqslant |t - t_0| \|A(\cdot)\|_{C^0(I)} \|(X_1 - X_2)(\cdot)\|_{C^0(I)}$$

En itérant k-fois (récurrence sur k en utilisant $(*)$) :

$$\|(\mathcal{T}^k(X_1)(t) - \mathcal{T}^k(X_2)(t)\| \leqslant |t - t_0|^k \frac{\|A(\cdot)\|^k_{C^0(I)}}{k!} \|(X_1 - X_2)(\cdot)\|_{C^0(I)}$$

Equations linéaires

Résultats généraux

Donc si I est borné de longueur L et

$$\rho := \frac{(L\|A\|_{C^0(I)})^k}{k!} < 1$$

$\mathcal{T}^k$ est contractant, donc admet un unique point fixe $X(\cdot)$.
$X(\cdot)$ est aussi l'unique point fixe de $\mathcal{T}$:

$$\mathcal{T}^k(\mathcal{T}(X)) = \mathcal{T}^{k+1}(X) = \mathcal{T}(\mathcal{T}^k(X)) = \mathcal{T}(X).$$

Par l'unicité : $\mathcal{T}(X) = X$ (réciproque triviale).
Le théorème de Picard à paramètre (version C^0) appliqué à $\mathcal{T}^k$ donne la deuxième partie du théorème : la dépendance est continue en les paramètres..

Equations linéaires
Résultats généraux

Pour obtenir la dépendance C^p (pour tout $p \geqslant 1$) on applique la version C^p du théorème de Picard à paramètres.
On a vu que $\mathcal{T}^k(\cdot, A, b, X_0)$ était ρ-contractante sur *l'espace de Banach* $C^0(I, E)$; comme elle est clairement affine et continue en $X(\cdot)$ elle est C^p pour tout p et comme $\mathcal{T}^k$ est ρ-contractante (et affine) on a $\|D_X\mathcal{T}^k\| \leqslant \rho$. Par ailleurs la dépendance en $A(\cdot) \in C^0(I, \mathcal{L}_c(E, E))$ (resp. $b(\cdot) \in C^0(I, E)$, resp. $X_0 \in E$) est linéaire (resp. affine) continue, si bien que $\mathcal{T}$ est C^p par rapport à chacune des variables $A(\cdot)$, $b(\cdot), X_0$ et $X(\cdot)$: elle est donc C^p pour tout p en $(X(\cdot), A(\cdot), b(\cdot))$
Les hypothèses du théorème de Picard à paramètre sont vérifiées.

$\square$

Sommaire Plan du cours 2

Equations linéaires à coefficients constants

On suppose à présent $E = \mathbb{K}^n$ (où $\mathbb{K} = \mathbb{C}^n$ ou $\mathbb{R}^n$) et que $A(\cdot) = \mathrm{constante} = A \in M(n, \mathbb{R})$ et $b(\cdot) = 0$:

$$\begin{cases} \dot{X}(t) = AX(t) \\ X(t_0) = X_0 \end{cases}$$

La solution est facile à écrire :

$$X(t) = e^{(t-t_0)A}X_0$$

où on définit pour $B \in M(n, \mathbb{K})$:

$$e^B = \exp(B) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{B^k}{k!} \in GL(n, \mathbb{K})$$

Equations linéaires à coefficients constants

En effet, en utilisant le point (6) du transparent suivant :

$$\frac{d}{dt}(e^{tA}X_0) = \left(\sum_{k=1}^{\infty} k\frac{t^{k-1}}{k!}A^k\right)X_0 = A\left(\sum_{l=0}^{\infty} \frac{t^l}{l!}A^l\right)X_0 = A(e^{tA}X_0).$$

Propriétés de l'exponentielle : Pour $A, B \in M(n, \mathbb{K})$

1. $\exp(A) \in GL(n, \mathbb{K})$ (i.e. est inversible) et on a, $\exp(A)^{-1} = \exp(-A)$.
2. $\det(e^A) = e^{\mathrm{tr}(A)}$
3. L'application exponentielle est $\mathbb{K}$-analytique (et donc de classe C^∞)
4. L'application linéaire tangente de l'exponentielle en 0 est l'identité : $D\exp(0) \cdot H = H, \qquad \forall H \in M_n(\mathbb{K})$.
5. Si $A, B \in M_n(\mathbb{K})$ commutent, i.e. $AB = BA$, on a, $\exp(A + B) = \exp(A)\exp(B)$. (faux en général)
6. $f(t) = \exp(tA)$ est C^∞ et $f'(t) = Ae^{tA} = e^{tA}A$.
7. Si $P \in GL(n, \mathbb{K})$, $Pe^AP^{-1} = e^{PAP^{-1}}$.
8. Si Δ est une matrice diagonale d'éléments diagonaux $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ alors e^Δ est diagonale d'éléments diagonaux $e^{\lambda_1}, \dots, e^{\lambda_n}$

Mise sous forme normale : si $A \in M(n, \mathbb{C})$ elle s'écrit toujours $A = S + N$ avec : S diagonalisable : $S = P\mathrm{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)P^{-1}$ et N nilpotente : $\exists k \in \mathbb{N}^*$, $N^k = 0$; S et N commutent ($SN = NS$).
Donc

$$e^{tA} = e^{tS}e^{tN} \text{ (}S\text{ et }N\text{ commutent)} = Pe^{\mathrm{diag}(t\lambda_1, \dots, t\lambda_n)}P^{-1}e^{tN}$$

avec $e^{tN} = I + tN + \cdots + \frac{t^{k-1}}{(k-1)!}N^{k-1}$: donc à coefficients polynomiaux en t et $e^{\mathrm{diag}(t\lambda_1, \dots, t\lambda_n)} = \mathrm{diag}(e^{t\lambda_1}, \dots, e^{t\lambda_n})$.

Conclusion :

Théorème

Les coefficients de $e^{tA}X_0$ sont des combinaisons linéaires de termes de la forme $t^pe^{t\lambda_q}$, $(0 \leqslant p \leqslant k-1,\ 1 \leqslant q \leqslant n)$

Origine géométrique de la décomposition $A = S + N$. Soit $\mu_A(X)$ le polynôme minimal de A : le polynôme de plus petit degré (normalisé) qui annule A ($\mu_A(A) = 0$).
$\mu_A(X) = \prod_{k=1}^r (X - \lambda_i)^{\alpha_i}$ où λ_i, $1 \leqslant i \leqslant r$ sont les valeurs propres de A (on a toujours $1 \leqslant \alpha_i \leqslant m_i$ où m_i multiplicité de λ_i dans le polynôme caractéristique $\det(A - X \cdot I)$ de A).
Alors

- $\mathbb{C}^n = \bigoplus_{i=1}^r \ker(A - \lambda_i I)^{\alpha_i}$;
- $\Gamma_{\lambda_i} = \ker(A - \lambda_i I)^{\alpha_i}$ est invariant par A (espaces caractéristiques) ;
- A restreinte à $\Gamma_{\lambda_i} = \ker(A - \lambda_i I)^{\alpha_i}$ est de la forme $\lambda_i \mathrm{id}_{\Gamma_i} + n_i$ où $n_i \in \mathrm{End}(\Gamma_{\lambda_i})$ est nilpotent d'ordre α_i ($n_i^{\alpha_i - 1} \neq 0$, $n_i^{\alpha_i} = 0$).

La décompositon géométrique précédente a un sens dynamique :

Théorème

On a $\mathbb{K}^n = \Gamma_s \oplus \Gamma_u \oplus \Gamma_c$ (espaces stable, instable, central) ($\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$) où

- $\Gamma_s(A) := \bigoplus_{\Re\lambda_i < 0} \ker(A - \lambda_i I)^{\alpha_i} \cap \mathbb{K}^n = \{v \in \mathbb{K}^n : \lim_{t \to \infty} \|e^{tA}.v\| = 0\}$
- $\Gamma_u(A) := \bigoplus_{\Re\lambda_i > 0} \ker(A - \lambda_i I)^{\alpha_i} \cap \mathbb{K}^n = \{v \in \mathbb{K}^n : \lim_{t \to -\infty} \|e^{tA}.v\| = 0\}$
- $\Gamma_c(A) := \bigoplus_{\Re\lambda_i = 0} \ker(A - \lambda_i I)^{\alpha_i} \cap \mathbb{K}^n = \{v \in \mathbb{K}^n : \exists C, M,\ \forall t \in \mathbb{R},\ \|e^{tA}.v\| \leqslant C(1 + |t|)^M \|v\|.\}$

Equations linéaires à coefficients constants
Décomposition dynamique

On a alors le résultat plus précis suivant :

Théorème

Pour tous $0 < \lambda_s < \min_{\Re\lambda_i<0} |\Re\lambda_i|$, $0 < \lambda_u < \min_{\Re\lambda_i>0} \Re\lambda_i$, *il existe* $C > 0$ *tel que*

- $\forall v \in \Gamma_s(A),\ \forall t > 0,\ \|e^{tA}.v\| \leqslant Ce^{-\lambda_s t}\|v\|,\ \|e^{-tA}.v\| \geqslant Ce^{\lambda_s t}\|v\|$
- $\forall v \in \Gamma_u(A),\ \forall t > 0,\ \|e^{-tA}.v\| \leqslant Ce^{-\lambda_u t}\|v\|,\ \|e^{tA}.v\| \geqslant Ce^{\lambda_u t}\|v\|$
- $\forall v \in \Gamma_c(A),\ \forall t \in \mathbb{R},\ C^{-1}\|v\| \leqslant \|e^{tA}.v\| \leqslant C(1+|t|)^n\|v\|.$

Equations linéaires à coefficients constants
Stabilité et stabilité asymptotique

On dit que 0 est stable (quand $t \to +\infty$) pour l'E.D.O. $X'(t) = AX(t)$ si toute solution de cette E.D.O. reste bornée quand t tend vers $+\infty$.
On dit que 0 est asymptotiquement stable (quand $t \to +\infty$) si toute solution de cette E.D.O. tend vers 0 quand t tend vers $+\infty$.

Théorème (Critère de Routh)

- *l'origine est asymptotiquement stable (quand $t \to \infty$) ssi toutes les valeurs propres de A sont de parties réelles strictement négatives.*
- *l'origine est stable (quand $t \to \infty$) ssi toutes les valeurs propres de A sont de parties réelles négatives et celles λ_i qui sont de parties réelles nulles sont telles que pour tout $q \geqslant 1$ $\ker(A - \lambda_i I)^q = \ker(A - \lambda_i I)$ (on dit que A est diagonalisable en λ_i)*

Equations linéaires à coefficients constants
Exemples en dimension 2

Regarder les portraits de phase du polycopié (p. 70-71).
Cas particulier important : $A \in sl(2,\mathbb{R}) := \{M \in M(2,\mathbb{R}) : \mathrm{tr}(M) = 0\}$.
On a alors pour tout t, $e^{tA} \in SL(2,\mathbb{R}) := \{M \in M(2,\mathbb{R}) : \det M = 1\}$.
Le cas général se ramène facilement à ce cas : si $A \in M(2,\mathbb{R})$, $\tilde{A} := A - (\mathrm{tr}(A)/2)I \in sl(2,\mathbb{R})$ et $e^{tA} = e^{t(\mathrm{tr}(A)/2)}e^{t\tilde{A}}$.
Dans la suite on se concentre sur le cas où $A \in sl(2,\mathbb{R})$.
On posera dans la suite $\omega = \sqrt{|\det A|}$.

Equations linéaires à coefficients constants
Exemples en dimension 2

Si $\det A > 0$:

- deux v.p. imaginaires pures $\pm i\omega$
- $\mathbb{R}^2 = \Gamma_c(A)$;
- toutes les orbites sont des ellipses parcourues avec la même période : A est elliptique.
- L'origine est stable.
- Il existe $P \in GL(2,\mathbb{R})$ tel que $A = P \begin{pmatrix} 0 & -\omega \\ \omega & 0 \end{pmatrix} P^{-1}$
- On a alors $e^{tA} = P \begin{pmatrix} \cos(\omega t) & -\sin(\omega t) \\ \sin(\omega t) & \cos(\omega t) \end{pmatrix} P^{-1}$

Si $\det A < 0$:

- deux v.p. réelles opposées $\pm\omega$;
- $\mathbb{R}^2 = \Gamma_s(A) \oplus \Gamma_u(A)$ où $\Gamma_s = \mathbb{R}v_s$, $\Gamma_u = \mathbb{R}v_u$.
- Les orbites sont des hyperboles : A est hyperbolique
- L'origine est instable.
- Il existe $P \in GL(2,\mathbb{R})$ tel que $A = P \begin{pmatrix} \omega & 0 \\ 0 & -\omega \end{pmatrix} P^{-1}$
- On a alors $e^{tA} = P \begin{pmatrix} e^{\omega t} & 0 \\ 0 & e^{-\omega t} \end{pmatrix} P^{-1}$

Si $\det A = 0$:

- deux v.p. nulles ;
- $\mathbb{R}^2 = \Gamma_c(A)$ mais A est nilpotente d'ordre 2 ou égale à $\pm Id$
- A est dite parabolique
- L'origine est instable si $a \neq 0$ (stable sinon).
- Il existe $P \in GL(2,\mathbb{R})$ et $a \in \mathbb{R}$ tels que $A = P \begin{pmatrix} 0 & a \\ 0 & 0 \end{pmatrix} P^{-1}$
- On a alors $e^{tA} = P \begin{pmatrix} 1 & ta \\ 0 & 1 \end{pmatrix} P^{-1}$.

On veut résoudre à présent

$$\begin{cases} X'(t) = AX(t) + b(t) \\ X(0) = X_0 \end{cases}$$

Théorème (Variation de la constante)

On a pour tout t

$$X(t) = e^{(t-t_0)A}X_0 + \int_{t_0}^{t} e^{(t-s)A}b(s)ds.$$

Démonstration. En effet si on pose $Y(t) := e^{-tA}X(t)$ on a

$$Y'(t) = -Ae^{-tA}X(t) + e^{-tA}(AX(t) + b(t)) = e^{-tA}b(t).$$

$\square$