Feuille d'exercices 4

Théorie des ensembles, seconde partie

1 Soit E un ensemble et $A_0,\ A_1,\dots,\ A_n$ des parties de E telles que : $\emptyset = A_0 \subsetneq A_1 \subsetneq A_2 \subsetneq \cdots \subsetneq A_n = E$. Montrer que $(A_k \setminus A_{k-1})_{1\leqslant k\leqslant n}$ forme une partition de E.

2 ☞ Soit $f : E \longrightarrow F$ et $\mathcal{S}$ une relation d'équivalence sur F. On définit une relation binaire $\mathcal{R}$ sur E par « $x\,\mathcal{R}\,y$ si et seulement si $f(x)\,\mathcal{S}\,f(y)$ ». Montrer que $\mathcal{R}$ est une relation d'équivalence.

3 Soit E un ensemble non vide et $\mathcal{A} \subset \mathcal{P}(E)$. On définit une relation binaire $\mathcal{R}$ sur E par : $x\,\mathcal{R}\,y$ si et seulement si pour tout $A \in \mathcal{A}$, on a :

$$\{x, y\} \subset A \text{ ou } \{x, y\} \subset E \setminus A.$$

Montrer que $\mathcal{R}$ est une relation d'équivalence et décrire les classes d'équivalence.

4 ☞ On définit ainsi la relation $\mathcal{R}$: pour x et y réels, $x\,\mathcal{R}\,y$ si et seulement si $(x^3+2)(y^2+1) = (y^3+2)(x^2+1)$. Montrer que $\mathcal{R}$ est une relation d'équivalence. Pour $x \in \mathbb{R}$, préciser le cardinal de la classe d'équivalence de x.

5 **Bijection canonique.** On se donne $f : E \longrightarrow F$ une application. On considère la relation binaire $\mathcal{R}_f$ définie par :

$$\forall (x, y) \in E^2,\ x\,\mathcal{R}_f\,y \iff f(x) = f(y).$$

1) Démontrer que $\mathcal{R}_f$ est une relation d'équivalence.
   On note Ω l'ensemble des classes d'équivalence de $\mathcal{R}_f$.
2) On considère $\overline{f} : [x] \in \Omega \longmapsto f(x) \in f(E)$.
   a) Montrer que $\overline{f}$ est bien définie.
   b) Montrer que $\overline{f}$ est une bijection : l'application $\overline{f}$ est appelée bijection canoniquement associée à f.
   c) On note $s : x \in E \longmapsto [x] \in \Omega$ la surjection canonique de E sur Ω et $i : y \in f(E) \longmapsto y \in F$ l'injection canonique de $f(E)$ dans F. Exprimer f en fonction de $\overline{f}$, s et i.

6 ☞ Soit E un ensemble à $n\,p$ éléments. Déterminer le nombre de partitions de E en n parties de cardinal p.

7 ☞ Pour tout ensemble fini E de cardinal n, on note w_n le nombre de relations d'équivalence de E ($w_0 = 1$ par convention). Montrer que les w_n vérifient : $w_{n+1} = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} w_k$.

8 ★ Pour n et p dans $\mathbb{N}^*$, on note $P_{n,p}$ le nombre de partitions (ensemblistes) de $[\![1, n]\!]$ en p parties.
1) Montrer que pour tout n et p dans $\mathbb{N}^*$, on a $P_{n+1,p+1} = P_{n,p} + (p+1)P_{n,p+1}$.
2) En déduire $P_{n,p}$ pour $1 \leqslant n, p \leqslant 5$.
3) Montrer que pour tout $n \geqslant 1$,

$$P_{n+1,n} = \binom{n+1}{2}, \qquad P_{n+1,2} = 2^n - 1, \qquad P_{n+1,3} = \frac{3^n - 2^{n+1} + 1}{2}$$

9 ☞ Soit X un ensemble, $F \subset X$ et $G \subset X$. On munit $\mathcal{P}(X)$ de l'ordre de l'inclusion. Que dire de $\max(F, G)$, $\sup(F, G)$, $\min(F, G)$, $\inf(F, G)$?

10 Soit E un ensemble totalement ordonné, $a \in E$ et $(x_i)_{i\in I}$ une famille de E possédant une borne supérieure. Montrer l'égalité :

$$\inf(a, \sup_{i\in I} x_i) = \sup_{i\in I} \inf(a, x_i).$$

11 ★ On définit sur $E = \mathcal{F}(\mathbb{N}, \mathbb{N})$ la relation $\sim$ de la manière suivante : si f et g sont dans E, alors

$$f \sim g \iff \exists n_0 \in \mathbb{N},\ \forall n \geqslant n_0,\ f(n) = g(n).$$

1) Montrer que $\sim$ est une relation d'équivalence sur E.
   On note Ω l'ensemble des classes d'équivalence. Pour ω et ω' deux classes d'équivalence, on dira que $\omega \leqslant \omega'$ s'il existe $f \in \omega$ et $f' \in \omega'$ tels que $f \leqslant f'$.
2) Soit $g, g' \in E$. On note ω (resp. ω') la classe de g (resp. g'). Montrer l'équivalence des deux propositions suivantes :
   (i) $\omega \leqslant \omega'$;
   (ii) il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $n \geqslant N$, $g(n) \leqslant g'(n)$.
3) Montrer que $(\Omega, \leqslant)$ est un ensemble ordonné.
4) L'ordre est-il total ? On justifiera la réponse.

12 Soit E et F deux ensembles ordonnés, $f : E \longrightarrow F$ et $g : F \longrightarrow E$ deux applications. On suppose que f et g sont décroissantes et que pour tout $(x, y) \in E \times F$, $g \circ f(x) \geqslant x$ et $f \circ g(y) \geqslant y$.

1) Montrer que $f \circ g \circ f = f$ et $g \circ f \circ g = g$.
2) Montrer qu'en posant, pour tout $x \in g(F)$ et tout $y \in f(E)$, $f'(x) = f(x)$ et $g'(y) = g(y)$, on définit deux bijections décroissantes, f' allant de $g(F)$ sur $f(E)$ et g' allant de $f(E)$ sur $g(F)$, et que ces deux bijections sont réciproques l'une de l'autre.

13 Soit E un ensemble totalement ordonné. Vérifier l'équivalence des propositions suivantes :

(i) toute partie non vide de E possède un plus grand élément ;
(ii) toute suite croissante de E est stationnaire (*i.e.* constante à partir d'un certain rang) ;
(iii) il n'existe aucune suite strictement croissante de E.

Quelles conditions équivalentes peut-on trouver à « toute partie non vide de E admet un plus petit élément » ?

14 ★ Soit E un ensemble non vide. On considère sur $\mathcal{P}(E)$ l'ordre induit par l'inclusion. Soit $f : \mathcal{P}(E) \longrightarrow \mathcal{P}(E)$ une application croissante. On note $\mathcal{Q}(E) = \{X \in \mathcal{P}(E),\ f(X) \subset X\}$.

1) Montrer que si $X \in \mathcal{Q}(E)$, $f(X) \in \mathcal{Q}(E)$.
2) Montrer que si $X_0 = \displaystyle\bigcap_{X \in \mathcal{Q}(E)} X$, alors $f(X_0) = X_0$.