Lycée Louis-le-Grand **2015-2016**
MP*3

PROGRAMME DE COLLES

SEMAINE 19 (DU 14/3 AU 18/3)

Espaces préhilbertiens réels, endomorphismes des espaces euclidiens

- Espaces préhilbertiens réels. Produit scalaire et norme associée. Inégalité de Cauchy-Schwarz. Formules de polarisation. Identité du parallélogramme (caractérisation des normes euclidiennes, hors-programme). Famille orthonormée, expression des composantes d'un vecteur appartenant à l'espace engendré par une famille orthonormée. Théorème de Pythagore. Procédé d'orthonormalisation de Schmidt.
- Orthogonalité dans les espaces préhilbertiens réels.
  - Définition de l'orthogonal $A^{\perp}$ d'une partie A. Propriétés élémentaires. Somme directe orthogonale. Lorsque $F \oplus F^{\perp} = E$, définition de la projection orthogonale p_F, projecteur sur F parallèlement à $F^{\perp}$. Lorsque $F \oplus F^{\perp} = E$, caractérisation métrique du projeté orthogonal $p_F(x)$ de $x \in E$ sur F.
  - Cas particulier des sous-espaces F de dimension finie. Expression du projeté orthogonal dans une base orthonormale de F.
  - Inégalité de Bessel. Suites totales. Si $(e_k)_k \in \mathbb{N}$ est une suite orthonormale totale et si, pour tout $n \in \mathbb{N}$, p_n désigne le projecteur orthogonal sur $\mathrm{Vect}(e_0, \dots, e_n)$ alors pour tout x de E, la suite $(p_n(x))_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers x (et l'égalité de Parseval est satisfaite).
- Cas particulier des espaces euclidiens.
  - Adjoint d'un endomorphisme (hors-programme).
  - Endomorphismes symétriques. Lien avec les matrices symétriques (attention, travailler en base orthonormée !). Un projecteur p est symétrique si et seulement p est un projecteur orthogonal. Autre caractérisation (hors-programme) : un projecteur p est symétrique si et seulement si pour tout vecteur x, $\|p(x)\| \leqslant \|x\|$. Une symétrie s est symétrique si et seulement s est une symétrie orthogonale. Si $u \in \mathscr{S}(E)$ et si F est un sev de E, alors $F^{\perp}$ est stable par u. **Théorème spectral : si u est un endomorphisme symétrique, alors E est somme directe orthogonale des sous-espaces propres de u.** Principe du minimax. Groupe orthogonal $O_n(\mathbb{R})$. Si $\mathscr{E}_0$ est une base orthonormée de E, alors pour toute base $\mathscr{B}$ de E, équivalence entre : $\mathscr{B}$ est une base orthonormée de E et la matrice de passage $P_{\mathscr{E}_0}^{\mathscr{B}}$ de $\mathscr{E}_0$ à $\mathscr{B}$ est orthogonale. **Interprétation matricielle du théorème spectral.**
  - Endomorphismes symétriques positifs (hors-programme). Endomorphismes symétriques définis positifs. Caractérisation via le spectre. Si $u \in \mathscr{S}^{++}(E)$, alors $(x, y) \mapsto < x, u(y) >$ est un produit scalaire sur E. Réduction simultanée : si $A \in \mathscr{S}_n^{++}(\mathbb{R})$ et si $B \in \mathscr{S}_n(\mathbb{R})$, alors il existe $P \in GL_n(\mathbb{R})$ et D diagonale telles que $A = {}^tP\,P$ et $B = {}^tP\,D\,P$. Pour tout endomorphisme symétrique positif, existence et unicité de la racine carrée symétrique positive. Calcul de la norme subordonnée à la norme euclidienne d'un endomorphisme u via le rayon spectral de $u^* \circ u$: $|||u||| = \sqrt{\rho(u^* \circ u)}$.
  - Isométries vectorielles. Groupe orthogonal $O(E)$. Une symétrie s est une isométrie vectorielle si et seulement s est une symétrie orthogonale. Un endomorphisme u appartient à $\mathscr{S}(E) \cap O(E)$ si et seulement si u est une symétrie orthogonale. Définition d'une réflexion, d'un retournement. Lien des isométries vectorielles avec les matrices orthogonales (attention, travailler en base orthonormée !). Décomposition polaire (hors-programme). Définition de $O^+(E)$ et de $O^-(E)$. Si $u \in O(E)$ et si F est un sev de E, alors $F^{\perp}$ est stable par u. Résultat hors-programme suivant : si $u \in O(E)$, alors en notant $p = \mathrm{codim}(\mathrm{Ker}(u - \mathrm{Id}_E))$, il existe p réflexions $s_1, \dots, s_p$ telles que $u = s_1 \circ \cdots \circ s_p$. **Théorème de réduction d'une isométrie vectorielle en base orthonormée. Interprétation matricielle de ce théorème.** Cas particulier : réduction d'une isométrie vectorielle directe d'un espace euclidien de dimension 3.
  - Étude de $SO_2(\mathbb{R})$ et de $O_2^-(\mathbb{R})$. Étude de $SO_3(\mathbb{R})$.
  - Quelques compléments hors-programmes : décomposition de Cholesky, décomposition QR, endomorphismes antisymétriques (en particulier, forme réduite d'un endomorphisme antisymétrique).

Prévisions pour la semaine 20

Fonctions vectorielles. Équations différentielles linéaires.