Lycée Condorcet **2015-2016**
MPSI2

À REMETTRE JEUDI 1ER OCTOBRE

DM 3

Exercice 1

Soit E et F deux ensembles ordonnés, $f : E \longrightarrow F$ et $g : F \longrightarrow E$ deux applications. On suppose que f et g sont décroissantes et que pour tout $(x, y) \in E \times F$, $g \circ f(x) \geqslant x$ et $f \circ g(y) \geqslant y$.

1) Montrer que $f \circ g \circ f = f$ et $g \circ f \circ g = g$.
2) On pose pour tout $x \in g(F)$, $f'(x) = f(x)$ et pour tout $y \in f(E)$, $g'(y) = g(y)$. Montrer que f' établit une bijection décroissante de $g(F)$ sur $f(E)$, que g' établit une bijection décroissante de $f(E)$ sur $g(F)$ et que ces deux bijections sont réciproques l'une de l'autre.

Exercice 2

Soit $f : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}$ une application strictement croissante telle que :

$$f(2) = 2 \quad \text{et} \quad \forall (p, q) \in \mathbb{N}^2,\ f(pq) = f(p)f(q).$$

Démontrer que f est l'identité.

Exercice 3

1) Soit $(n, x) \in \mathbb{N}^* \times \mathbb{R}$. On considère $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ définie par : pour tout $y \in \mathbb{R}$, $f(y) = (x - y) \sum\limits_{k=0}^{n-1} x^k y^{n-1-k}$.
   a) Simplifier l'expression de $f(y)$ pour tout $y \in \mathbb{R}$.
   b) Après avoir justifié la dérivabilité de f, montrer en exprimant f' de deux manières différentes que pour tout $y \in \mathbb{R}$,
   $$x^n - nxy^{n-1} + (n-1)y^n = (x - y)^2 \sum_{k=0}^{n-2} (n - k - 1)x^k y^{n-k-2}.$$
2) Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $(\alpha, \beta) \in (\mathbb{R}_+)^2$. Montrer que : $\dfrac{\alpha + (n-1)\beta}{n} \geqslant \sqrt[n]{\alpha \beta^{n-1}}$.
3) Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $a_1, \ldots, a_n$ dans $\mathbb{R}_+$. Montrer que :
   $$\frac{a_1 + \ldots + a_n}{n} \geqslant \sqrt[n]{a_1 \ldots a_n}.$$
4) *Applications.*
   a) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Montrer que $n! \leqslant \left(\dfrac{n+1}{2}\right)^n$.
   b) Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $x_1, \ldots, x_n \in \mathbb{R}_+^*$. Montrer que : $\dfrac{x_1}{x_2} + \dfrac{x_2}{x_3} + \cdots + \dfrac{x_{n-1}}{x_n} + \dfrac{x_n}{x_1} \geqslant n$.