Diverses descriptions d'un ensemble

1 Définitions d'un ensemble

1.1 Ensemble défini en extension

Définition 1. On dit qu'un ensemble est défini *en extension* lorsqu'on explicite la liste de tous ses éléments.

Exemple

Par exemple, si on pose
$$A_1 = \{1, 3, 5\},$$
on a défini A_1 en extension.

Bien entendu, seuls les ensembles ayant un nombre fini d'éléments peuvent être définis en extension.

1.2 Ensemble défini en compréhension

Définition 2. On dit qu'un ensemble A est défini *en compréhension* lorsqu'il existe un ensemble X contenant A et une famille d'énoncés mathématiques $(\mathscr{E}(x))_{x\in X}$ indexée par X tels que A soit exactement l'ensemble des éléments x de X pour lesquels $\mathscr{E}(x)$ est vrai. On écrit :
$$A = \{x \in X\,;\, \mathscr{E}(x) \text{ est vrai}\}.$$

Exemples

1. L'ensemble $A_1 = \{1, 3, 5\}$ pourrait également être défini en compréhension en disant que A_1 est l'ensemble des entiers naturels qui sont impairs et qui sont inférieurs à 6. Ici, X_1 est $\mathbb{N}$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$,
$$\mathscr{E}_1(n) : \text{« } (\exists\, k \in \mathbb{Z}\,;\, n = 2\,k + 1) \wedge (n \leqslant 6) \text{ »}.$$
On a effectivement
$$A_1 = \{n \in \mathbb{N}\,;\, (\exists\, k \in \mathbb{Z}\,;\, n = 2\,k + 1) \text{ et } (n \leqslant 6)\}.$$
2. L'ensemble A_2 des suites réelles arithmétiques peut être défini en compréhension en écrivant
$$A_2 = \left\{(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}\,;\, (\exists\, r \in \mathbb{R}\,;\, \forall\, n \in \mathbb{N}\,;\, u_{n+1} = u_n + r)\right\}.$$
Rappelons que l'ensemble $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ est l'ensemble des suites réelles.
3. La droite $\mathscr{D}_3$ passant par les points $(0, -1)$ et $(2, 0)$ peut être définie en compréhension :
$$\mathscr{D}_3 = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2\,;\, x - 2y - 2 = 0\right\}.$$

1.3 Ensemble défini par une fonction

Définition 3. On dit qu'un ensemble A est défini *par une fonction* lorsqu'il existe un ensemble Y contenant A, un ensemble E et une application $f : E \to Y$ tels que A soit exactement l'image directe de E par f :

$$A = \{f(e)\,;\, e \in E\}.$$

Exemples

1. L'ensemble $A_1 = \{1, 3, 5\}$ pourrait également être défini par une fonction en posant

$$\begin{array}{rccl} f_1 & : & \{1,2,3\} & \longrightarrow & \mathbb{Z} \\ & & e & \longmapsto & 2e-1 \end{array}$$

   et en notant que $A_1 = f_1(\{1,2,3\})$.
2. L'ensemble A_2 des suites réelles arithmétiques peut être défini par une fonction en écrivant

$$A_2 = \left\{(\alpha + nr)_{n\in\mathbb{N}}\,;\,(\alpha, r) \in \mathbb{R}^2\right\}.$$

3. La droite $\mathscr{D}_3$ passant par les points $(0, -1)$ et $(2, 0)$ peut être définie par une fonction :

$$\mathscr{D}_3 = \{(2t, t-1)\,;\, t \in \mathbb{R}\}.$$

2 Comment montrer l'appartenance à un ensemble ?

On peut se demander comment on prouve qu'un objet mathématique x_0 appartient à un ensemble A lorsque A est défini en compréhension ou par une fonction.

2.1 Appartenance à un ensemble défini en compréhension

On reprend les notations de la définition 2 et on suppose que

$$A = \{x \in X\,;\, \mathscr{E}(x) \text{ est vrai}\}.$$

Écrire que

$$x_0 \in A$$

signifie alors que $x_0 \in X$ et que $\mathscr{E}(x_0)$ est vrai. Ainsi, pour montrer que $x_0 \in A$, on doit montrer les deux assertions suivantes :

$$\begin{cases} x_0 \in X \\ \mathscr{E}(x_0) \text{ est vrai.} \end{cases}$$

Dit autrement,

$$x_0 \in A \qquad \Longleftrightarrow \qquad x_0 \in X \text{ et } \mathscr{E}(x_0) \text{ est vrai.}$$

2.2 Appartenance à un ensemble défini par une fonction

On reprend les notations de la définition 3 et on suppose que

$$A = f(E).$$

Écrire que

$$x_0 \in A$$

signifie alors qu'il existe $e_0 \in E$ tel que $x_0 = f(e_0)$. Ainsi,

$$x_0 \in A \qquad \Longleftrightarrow \qquad \exists\, e_0 \in E\,;\, x_0 = f(e_0).$$

3 Comment montrer l'égalité de deux ensembles définis de manières différentes ?

On peut se demander comment on prouve qu'un ensemble A défini en compréhension est égal à un ensemble B défini par une fonction. C'est très simple ! Il suffit de procéder par double inclusion et de se souvenir ce que signifie $x_0 \in A$ et ce que signifie $x_0 \in B$. Reprenons les notations de la définition 2 et de la définition 3 et supposons :

$$A = \{x \in X\,;\, \mathscr{E}(x) \text{ est vrai}\} \quad \text{et} \quad B = \{f(e)\,;\, e \in E\}.$$

- Pour établir $A \subset B$, on procède comme suit. Soit $x \in A$. Alors $x \in X$ et la propriété $\mathscr{E}(x)$ est vraie. Il faut alors réussir à trouver un élément e de E tel que $x = f(e)$ (c'est une question souvent difficile !). Si on y parvient, on peut conclure que $x \in B$. Finalement, ceci montre que pour tout $x \in A$, on a $x \in B$, et donc que $A \subset B$.
- Pour établir $B \subset A$, il suffit de prouver que

  $$\forall\, e \in E, \quad f(e) \in A.$$

  On procède donc comme suit. Soit $e \in E$. Il s'agit de montrer que $f(e) \in X$ et que la propriété $\mathscr{E}(f(e))$ est satisfaite. Si on y parvient, on peut conclure que $f(e) \in A$. Finalement, ceci montre que pour tout $e \in E$, on a $f(e) \in A$, et donc que $f(E) \subset A$, *i.e.* $B \subset A$[1].

4 Cas de l'image réciproque d'un ensemble par une fonction

Nous avons vu qu'ensemble défini par une fonction est par définition l'image directe d'un ensemble par une fonction. On peut alors se demander de quel type est l'image réciproque d'un ensemble par une fonction : soit Z et F deux ensembles, $g : F \to Z$ une fonction et B une partie de Z. L'image réciproque $g^{-1}(B)$ de B par g est par définition :

$$g^{-1}(B) = \{x \in F\,;\, g(x) \in B\}.$$

On voit que $g^{-1}(B)$ est un ensemble défini en compréhension : c'est l'ensemble des éléments x de F qui vérifient la condition « $g(x) \in B$ ».

1. Notons que montrer $B \subset A$ est souvent plus simple que montrer $A \subset B$.