Feuille d'exercices 3

Nombres complexes et trigonométrie

1 Soit $\lambda \in \mathbb{C} \setminus \{-i\}$. Montrer l'équivalence : $\lambda \in \mathbb{R} \iff \left|\dfrac{1+\lambda i}{1-\lambda i}\right| = 1$.

2 Soit z et z' deux complexes de module 1 avec $zz' \neq -1$. Montrer que $\dfrac{z+z'}{1+zz'}$ est réel.

3 ☞ Mettre sous forme algébrique puis trigonométrique le nombre complexe $z = \dfrac{4}{1+i\sqrt{3}}$. Calculer z^3.

4 Soit $f \in \mathcal{F}(\mathbb{C}, \mathbb{C})$ une application telle que pour tout $(z, z)' \in \mathbb{C}^2$, on a $f(z+z') = f(z)+f(z')$ et $f(z\,z') = f(z)\,f(z')$ et pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f(x) = x$. Montrer qu'alors f est l'identité ou la conjugaison.

5 Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $(a_1, \ldots, a_n, b_1, \ldots, b_n) \in \mathbb{Z}^{2n}$. Montrer qu'il existe A et B dans $\mathbb{N}$ tels que $A^2 + B^2 = \displaystyle\prod_{k=1}^{n}(a_k^2 + b_k^2)$.
Expliciter A et B dans le cas où $n = 2$.

6 Soit $\mathcal{P} = \{z \in \mathbb{C},\ \mathrm{Im}(z) > 0\}$ et $\mathcal{D} = \{z \in \mathbb{C},\ |z| < 1\}$. Montrer que $f : z \in \mathcal{P} \longmapsto \dfrac{z-i}{z+i} \in \mathcal{D}$ est une bijection.

7 Résoudre les équations suivantes d'inconnue $x \in \mathbb{R}$:

1) $\tan(3x - \frac{\pi}{5}) = \tan(x + \frac{4\pi}{5})$;
2) $\sin x + (1+\sqrt{2})\cos x - 1 = 0$;
3) $a\cos(2x) = 4\sin x$, avec $a \in \mathbb{R}$.

8 ☞ 1) Linéariser l'expression $\cos^7 x$ ($x \in \mathbb{R}$).
2) Exprimer $\sin(9x)$ en fonction de $\sin x$ et $\cos x$ ($x \in \mathbb{R}$).

9 ☞ Soit $n \in \mathbb{N}^*$, $(x, y) \in \mathbb{R}^2$. Calculer $\displaystyle\sum_{k=0}^{n-1}\cos(x+ky)$, $\displaystyle\sum_{k=0}^{n-1}\sin(x+ky)$, $\displaystyle\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\cos(x+ky)$, $\displaystyle\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\sin(x+ky)$.

10 Soit $n \in \mathbb{N}^*$, $(x, y) \in \mathbb{R}^2$. Calculer $\displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} x^k\cos(ky)$ et $\displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} x^k\sin(ky)$.

11 Calculer pour tout $(n, x) \in \mathbb{N}^* \times \mathbb{R}$, $\displaystyle\sum_{k=0}^{n-1}\cos\left((2k+1)x\right)$ et $\displaystyle\sum_{k=0}^{n-1}\cos(2kx)$.
En déduire $\cos^2\left(\dfrac{\pi}{14}\right) + \cos^2\left(\dfrac{3\pi}{14}\right) + \cos^2\left(\dfrac{5\pi}{14}\right)$.

12 Résoudre l'équation d'inconnue $x \in \mathbb{R}$ suivante : $1 + \cos x + \cos(2x) + \cos(3x) + \cos(4x) = 0$.

13 Déterminer une condition nécessaire et suffisante sur les complexes a, b et c (avec $a \neq 0$) pour que les solutions de l'équation $(E) : az^2 + bz + c = 0$ soient toutes imaginaires pures.

14 Soit $(a, b) \in \mathbb{C}^2$. Donner une condition nécessaire et suffisante pour que le polynôme $X^2 - aX + b$ ait deux racines de module 1.

15 ☞ Calculer le produit des racines n-ième de l'unité.

16 Soit $\omega = e^{\frac{2i\pi}{7}}$. Calculer $A = \omega + \omega^2 + \omega^4$ et $B = \omega^3 + \omega^5 + \omega^6$.

17 Vérifier pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, et tout $z \in \mathbb{C}$ la relation $\displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} \left(z + e^{\frac{2ik\pi}{n}}\right)^n = n(z^n + 1)$.

18 ☞ Résoudre les équations suivantes d'inconnue $z \in \mathbb{C}$:

1) $z^2 = -7 + 24i$;
2) $z^2 - 2(2+i)z + 6 + 8i = 0$;
3) $z^4 - (5 - 14i)z^2 - 2(5i + 12) = 0$;
4) $(3z^2 + z + 1)^2 + (z^2 + 2z + 2)^2 = 0$.

19 Résoudre dans $\mathbb{C}$ les équations en z suivantes :

1) $\displaystyle\left(\frac{1+iz}{1-iz}\right)^n = \frac{1+i\tan\alpha}{1-i\tan\alpha}$, avec $n \in \mathbb{N}^*$ et $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \frac{\pi}{2}\mathbb{Z}$;
2) $(z+i)^n - (z-i)^n = 0$, avec $n \in \mathbb{N}^*$.

20 1) Vérifier que pour tout $z \in \mathbb{C}^*$, on a : $\displaystyle\frac{1 + z + z^2 + z^3 + z^4}{z^2} = \left(z + \frac{1}{z}\right)^2 + \left(z + \frac{1}{z}\right) - 1$.
2) Déterminer les racines complexes de l'équation : $Z^2 + Z - 1 = 0$, puis résoudre l'équation en z : $1 + z + z^2 + z^3 + z^4 = 0$.
3) En déduire les valeurs de $\cos\left(\frac{\pi}{5}\right)$ et $\sin\left(\frac{\pi}{5}\right)$.

21 Soit $(z, n) \in \mathbb{C} \times \mathbb{N}^*$. On suppose que $1 + z + z^2 + \ldots + z^{n-1} - nz^n = 0$. Montrer que $|z| \leqslant 1$.

22 ★ Calculer, pour $n \in \mathbb{N}^*$, les sommes $\displaystyle A = \sum_{0 \leqslant 3k \leqslant n} \binom{n}{3k}$, $\displaystyle B = \sum_{0 \leqslant 3k+1 \leqslant n} \binom{n}{3k+1}$, $\displaystyle C = \sum_{0 \leqslant 3k+2 \leqslant n} \binom{n}{3k+2}$.

23 ★ 1) Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $\alpha \notin \left(\frac{\pi}{2} + \pi\mathbb{Z}\right)$. Vérifier la formule : $\displaystyle\frac{\sin(n\alpha)}{\cos^n \alpha} = \sum_{0 \leqslant 2k+1 \leqslant n} (-1)^k \binom{n}{2k+1} \tan^{2k+1} \alpha$.
2) Soit $p \in \mathbb{N}^*$. Résoudre les équations suivantes d'inconnue $x \in \mathbb{R}$:

$$\sum_{k=0}^{p} (-1)^k \binom{2p+1}{2k+1} x^{2k} = 0, \quad \text{puis} \quad \sum_{k=0}^{p-1} (-1)^k \binom{2p}{2k+1} x^{2k} = 0.$$

24 Soit $a, b, c \in \mathbb{R}$ tels que $\cos a + \cos b + \cos c = \sin a + \sin b + \sin c = 0$. Montrer que $\cos(2a) + \cos(2b) + \cos(2c) = \sin(2a) + \sin(2b) + \sin(2c) = 0$.

25 ★ On se donne treize réels deux à deux distincts. Montrer qu'il en existe deux parmi eux, disons x et y, tels que :

$$0 < \frac{x - y}{1 + xy} < 2 - \sqrt{3}.$$

On pensera à la fonction tangente.

26 Soit $n \in \mathbb{N}^*$, $(z_1, \ldots, z_n) \in \mathbb{C}^n$. Montrer que : $\displaystyle\frac{\left|\sum_{k=1}^{n} z_k\right|}{1 + \left|\sum_{k=1}^{n} z_k\right|} \leqslant \sum_{k=1}^{n} \frac{|z_k|}{1 + |z_k|}$.

27 ☞ 1) Montrer que pour tout $(z, u) \in \mathbb{C}^2$, on a : $|z + u|^2 + |z - u|^2 = 2(|z|^2 + |u|^2)$.
2) Soit $(z, z', u) \in \mathbb{C}^3$ tel que $zz' = u^2$. Prouver : $\displaystyle\left|\frac{z + z'}{2} + u\right| + \left|\frac{z + z'}{2} - u\right| = |z| + |z'|$.

28 **Inégalité de Ptolémée.**

1) Montrer que pour tout $(a,b) \in \mathbb{C}^*$: $\left|\dfrac{a}{|a|^2} - \dfrac{b}{|b|^2}\right| = \dfrac{|a-b|}{|a|.|b|}$.
2) Montrer que pour tout $(x,y,z) \in \mathbb{C}^3$: $|x|.|y-z| \leqslant |y|.|z-x| + |z|.|x-y|$.
3) En déduire pour $(x,y,z,w) \in \mathbb{C}^4$, l'inégalité de Ptolémée :

$$|x-y|.|z-w| \leqslant |x-z|.|y-w| + |x-w|.|y-z|.$$

29 ☞ Quel est l'ensemble des points M du plan complexe dont l'affixe z vérifie $z + \overline{z} = |z|$?

30 Déterminer les nombres complexes z tels que z, $\dfrac{1}{z}$ et $1-z$ ont même module.

31 ☞ Soient $\mathcal{C}$ et $\mathcal{C}'$ deux cercles de $\mathbb{C}$. Deux points M et M' décrivent respectivement $\mathcal{C}$ et $\mathcal{C}'$ de telle sorte que la tangente à $\mathcal{C}$ en M et la tangente à $\mathcal{C}'$ en M' soient orthogonales. Trouver le milieu du segment $[MM']$.

32 Dans le plan $\mathcal{P}$ muni d'un repère orthonormé, on considère les droites d'équations respectives :

$$ax + by + c = 0 \ , \quad ax + by = \sqrt{3}(bx - ay) \ , \quad ax + by = -\sqrt{3}(bx - ay).$$

Montrer que ces trois droites sont les côtés d'un triangle équilatéral.

33 ☞ Soit $(A,B,C,M) \in \mathcal{P}^4$. On note A', B', C' les symétriques de M par rapport à $\dfrac{B+C}{2}$, $\dfrac{A+C}{2}$ et $\dfrac{A+B}{2}$ respectivement. Montrer que (AA'), (BB') et (CC') sont concourantes.

34 ☞ Soit (a,b,c) un triangle du plan complexe.

1) Montrer l'équivalence des propositions suivantes :
   (i) (a,b,c) forme un triangle équilatéral direct ;
   (ii) $a + jb + j^2c = 0$.
2) Montrer l'équivalence des propositions suivantes :
   (i) (a,b,c) forme un triangle équilatéral ;
   (ii) $a^2 + b^2 + c^2 = ab + bc + ca$.

35 ★ Quels sont les $z \in \mathbb{C}^*$ tels que z et ses racines cubiques forment un parallélogramme ?

36 Dans le plan euclidien orienté $\mathcal{P}$, on considère (ABC) un triangle. On note $\hat{A}$ la mesure de l'angle non orienté des vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ et $a = BC$. On définit de manière analogue $\hat{B}$, $\hat{C}$, b et c.

1) Montrer que les déterminants $\mathrm{Det}(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC})$, $\mathrm{Det}(\overrightarrow{BC},\overrightarrow{BA})$ et $\mathrm{Det}(\overrightarrow{CA},\overrightarrow{CB})$ sont égaux. On dit que (ABC) est orienté positivement s'ils sont positifs, négativement sinon.
2) Montrer que la mesure principale de l'angle $(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC})$ est égale à $\hat{A}$ si (ABC) est orienté positivement, $-\hat{A}$ sinon.
3) Démontrer que $\hat{A} + \hat{B} + \hat{C} = \pi$.
4) On note p le demi-périmètre $\dfrac{1}{2}(a+b+c)$, R le rayon du cercle circonscrit et S l'aire de (ABC).
   a) Montrer que :
   $$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos\hat{A} \quad \text{et} \quad \frac{a}{\sin\hat{A}} = \frac{b}{\sin\hat{B}} = \frac{c}{\sin\hat{C}} = 2R.$$
   b) Montrer que :
   $$S = \frac{1}{2}bc\sin\hat{A} = \frac{abc}{4R} = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}.$$