COMMENTAIRES SUR L'EXERCICE 12 DE LA FEUILLE D'EXERCICES 1

1 Rappel de l'exercice

Soit E un ensemble, A et B deux parties de E. Résoudre dans $\mathscr{P}(E)$ l'équation :

$$(E_2) \quad X \cap A = B.$$

2 Résolution

Nous avons en TD que lorsque $B \not\subset A$, alors l'ensemble $\mathscr{S}$ des solutions de (E_2) est l'ensemble vide :

$$\boxed{B \not\subset A \implies \mathscr{S} = \emptyset}.$$

On suppose désormais que $B \subset A$. Pour déterminer l'ensemble $\mathscr{S}$ des solutions de (E_2), on procède par analyse/synthèse.

Analyse. Soit $X \in \mathscr{S}$. Alors X est une partie de E telle que $X \cap A = B$. On peut constater au brouillon via un petit dessin que d'une part $B \subset X$ et que $X \cap (A \setminus B) = \emptyset$. Montrons que ceci est vrai.

- Soit $b \in B$. Alors $b \in X \cap A$, donc $b \in X$. Ainsi, pour tout $b \in B$, on a : $b \in X$, donc $B \subset X$.
- Supposons qu'il existe $x \in X \cap (A \setminus B)$. Alors $x \in X$ et $x \in A \subset B$, et donc en particulier $x \in A$ et $x \notin B$. Comme $x \in X$ et $x \in A$, on a : $x \in X \cap A$. Or, $X \cap A = B$. Donc $x \in B$. Ceci contredit $x \notin B$. Finalement, l'ensemble $X \cap (A \setminus B)$ ne contient pas d'élément : $X \cap (A \setminus B) = \emptyset$.

On conclut que tous les éléments X de $\mathscr{S}$ vérifient $B \subset X$ et que $X \cap (A \setminus B) = \emptyset$. On a donc montré :

$$\mathscr{S} \subset \{X \in \mathscr{P}(E)\,;\, B \subset X \text{ et } X \cap (A \setminus B) = \emptyset\}.$$

Remarquons que l'ensemble

$$\{X \in \mathscr{P}(E)\,;\, B \subset X \text{ et } X \cap (A \setminus B) = \emptyset\}$$

est défini *en compréhension* (voir le document *Diverses descriptions d'un ensemble*).

Synthèse. Montrons maintenant que

$$\{X \in \mathscr{P}(E)\,;\, B \subset X \text{ et } X \cap (A \setminus B) = \emptyset\} \subset \mathscr{S}.$$

Soit donc X un élément de $\mathscr{P}(E)$ tel que $B \subset X$ et $X \cap (A \setminus B) = \emptyset$. Montrons que $X \in \mathscr{S}$. Il s'agit de prouver que $X \cap A = B$. On procède bien sûr par double inclusion.

$\boxed{\subset}$ Montrons que $X \cap A \subset B$. Soit $x \in X \cap A$. Alors $x \in X$ et $x \in A$. Supposons par l'absurde que $x \notin B$. Alors $x \in A \setminus B$. Comme $x \in X$, on a donc : $x \in X \cap (A \setminus B)$, ce qui est absurde parce que $X \cap (A \setminus B) = \emptyset$. Ainsi, $x \in B$. Finalement, tous les éléments de $X \cap A$ sont des éléments de B, donc $X \cap A \subset B$.

$\boxed{\supset}$ Montrons que $B \subset X \cap A$. Comme $B \subset X$ et comme $B \subset A$, on a bien : $B \subset X \cap A$.

Finalement, tous les éléments X de $\mathscr{P}(E)$ vérifiant $B \subset X$ et $X \cap (A \setminus B) = \emptyset$ sont des éléments de $\mathscr{S}$, donc

$$\{X \in \mathscr{P}(E)\,;\, B \subset X \text{ et } X \cap (A \setminus B) = \emptyset\} \subset \mathscr{S}.$$

Conclusion. Nous pouvons conclure que

$$\boxed{B \subset A \implies \mathscr{S} = \{X \in \mathscr{P}(E)\,;\, B \subset X \text{ et } X \cap (A \setminus B) = \emptyset\}}.$$

3 Une autre manière de décrire l'ensemble des solutions

En TD, nous avions également vu (toujours dans le cas intéressant où $B \subset A$) dans l'analyse que si $X \in \mathscr{S}$, alors il existe une partie D de $E \setminus A$ telle que $X = B \cup D$. Reprenons cette idée. Nous supposons donc que $B \subset A$.

Analyse. Soit $X \in \mathscr{S}$. Alors X est une partie de E telle que $X \cap A = B$. On peut constater au brouillon via un petit dessin que X peut se voir comme $B \cup D$ où $D \subset E \setminus A$. Montrons que ceci est vrai. On pose

$$D = X \cap (E \setminus A).$$

Montrons que $X = B \cup D$. On procède par double inclusion.

- $\boxed{\subset}$ Montrons que $X \subset B \cup D$. Soit $x \in X$. Supposons aussi que $x \notin B$. Comme $X \cap A = B$, si $x \in A$, alors $x \in X \cap A$ et donc $x \in B$, ce qui n'est pas vrai. Donc $x \notin A$, *i.e.* $x \in E \setminus A$. Et comme $x \in X$, on a donc $x \in X \cap (E \setminus A)$, *i.e.* $x \in D$. Finalement, tous les éléments x de X qui vérifient $x \notin B$ appartiennent à D, *i.e.* $X \subset B \cup D$.
- $\boxed{\supset}$ Montrons que $B \cup D \subset X$. On sait que $X \cap A \subset X$, donc $B \subset X$. De même, $X \cap (E \setminus A) \subset X$ donc $D \subset X$. Ainsi, $B \subset X$ et $D \subset X$ donc $B \cup D \subset X$.

Finalement, $X = B \cup D$. On conclut que pour tout $X \in \mathscr{S}$, il existe $D \in \mathscr{P}(E \setminus A)$ tel que

$$X = B \cup D.$$

Ceci montre que

$$\mathscr{S} \subset \{B \cup D\,;\, D \in \mathscr{P}(E \setminus A)\}.$$

Remarquons que l'ensemble

$$\{B \cup D\,;\, D \in \mathscr{P}(E \setminus A)\}$$

est défini *par une fonction*[1] (voir le document *Diverses descriptions d'un ensemble*).

Synthèse. Montrons maintenant que

$$\{B \cup D\,;\, D \in \mathscr{P}(E \setminus A)\} \subset \mathscr{S}.$$

Soit donc $D \in \mathscr{P}(E \setminus A)$. Montrons que $B \cup D \in \mathscr{S}$. Il s'agit de prouver que $(B \cup D) \cap A = B$. Remarquons que

$$(B \cup D) \cap A = (B \cap A) \cup (D \cap A).$$

Or, comme $B \subset A$, on a : $B \cap A = B$. Et comme $D \subset E \setminus A$, on a : $D \cap A = \emptyset$. Donc

$$(B \cup D) \cap A = B \cup \emptyset$$

i.e. $(B \cup D) \cap A = B$. Finalement, nous pouvons conclure que :

$$\forall D \in \mathscr{P}(E \setminus A), \quad B \cup D \in \mathscr{S},$$

donc

$$\{B \cup D\,;\, D \in \mathscr{P}(E \setminus A)\} \subset \mathscr{S}.$$

Conclusion. Nous pouvons conclure que

$$\boxed{B \subset A \implies \mathscr{S} = \{B \cup D\,;\, D \in \mathscr{P}(E \setminus A)\}}.$$

4 Conclusion

Nous voyons donc que (toujours lorsque $B \subset A$) l'ensemble des solutions peut être donné de deux manières différentes : soit en compréhension, soit par une fonction. Les deux réponses sont correctes !

---

1. C'est en effet l'image directe de $P(E \setminus A)$ par la fonction $\begin{array}{ccc} P(E \setminus A) & \longrightarrow & \mathscr{P}(E) \\ D & \longmapsto & B \cup D. \end{array}$