Lycée Condorcet **2015-2016**
MPSI2

FEUILLE D'EXERCICES 2

Calculs algébriques

1 Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$: $1.1! + 2.2! + 3.3! + \ldots + n.n! = (n+1)! - 1$.

2 **Identité d'Al Karagi.** Montrer pour tout $n \geqslant 1$:
$$1^3 + 2^3 + 3^3 + \ldots + (n-1)^3 + n^3 = (1 + 2 + 3 + \ldots + (n-1) + n)^2.$$

3 ☞ On fixe des réels a, b et x. Calculer les différentes sommes suivantes :

1) a) $\displaystyle\sum_{k=0}^{n}(a+kb)$ b) $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} x^k$.

2) a) $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}(2k-1)$ b) $\displaystyle\sum_{k=0}^{n}(-1)^{n-k}$ c) $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k(k+1)}$ d) $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} k(n+1-k)$.

3) $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} k2^k$. On pourra utiliser 1)b) ou écrire cette somme sous la forme $\displaystyle\sum_{1\leqslant i\leqslant k\leqslant n} 2^k$.

4 Calculer pour $n \in \mathbb{N}^*$ les sommes doubles suivantes :

a) $\displaystyle a_n = \sum_{(i,j)\in[\![1,n]\!]^2} \min(i,j)$ b) $\displaystyle b_n = \sum_{(i,j)\in[\![1,n]\!]^2} \max(i,j)$ c) $\displaystyle c_n = \sum_{1\leqslant i\leqslant j\leqslant n} ij$

d) $\displaystyle d_n = \sum_{1\leqslant i\leqslant j\leqslant n} (i+j)$ e) $\displaystyle e_n = \sum_{\substack{1\leqslant i,j\leqslant n\\ |i-j|=1}} ij$ f) $\displaystyle f_n = \sum_{i+j=n} ij$.

5 ☞ Simplifier les produits suivants :

a) $\displaystyle\prod_{p=2}^{n}\left(1-\frac{1}{p^2}\right)$ b) $\displaystyle\prod_{k=1}^{n}\left(1+z^{2^k}\right)$ c) $\displaystyle\prod_{k=1}^{n}\cos\left(\frac{\theta}{2^k}\right)$.

6 Soit E un ensemble de cardinal $n \geqslant 1$. Calculer $\displaystyle\sum_{X\in\mathcal{P}(E)} |X|$ et $\displaystyle\sum_{X\in\mathcal{P}(E)} (-1)^{|X|}|X|$.

7 ☞ Soit E un ensemble fini à n éléments. Déterminer le cardinal des ensembles suivants :

1) $\mathcal{A} = \{(X,Y) \in \mathcal{P}(E)^2,\ X \subset Y\}$;
2) $\mathcal{B} = \{(X,Y) \in \mathcal{P}(E)^2,\ X \cap Y = \emptyset\}$;
3) $\mathcal{C} = \{(X,Y,Z) \in \mathcal{P}(E)^3,\ X \subset Y \subset Z\}$.

8 Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, et pour tout $p \in \mathbb{N}$, on a $\displaystyle\sum_{k=0}^{p}(-1)^k\binom{n}{k} = (-1)^p\binom{n-1}{p}$.

9 ☞ Soit $(n,p,k) \in \mathbb{N}^3$.

1) Montrer par récurrence que $\displaystyle\binom{n+p}{k} = \sum_{i=0}^{k}\binom{n}{i}\binom{p}{k-i}$. En déduire la valeur de $\displaystyle\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}^2$.

2) Soit E un ensemble à $n+p$ éléments, A et B deux parties disjointes de E de cardinal respectif n et p. En considérant
$$\begin{aligned}\Phi : \mathcal{P}(E) &\longrightarrow \mathcal{P}(A)\times\mathcal{P}(B)\\ X &\longmapsto (X\cap A, X\cap B)\end{aligned}$$
retrouver le résultat de la première question.

10 **Formule du crible.** Soit E un ensemble fini, $(A_i)_{i\in I}$ une famille finie de parties de E, $I = [\![1, n]\!]$ avec $n \geqslant 1$.

1) Montrer par récurrence $\left|\bigcup_{i\in I} A_i\right| = \sum_{J\in\mathcal{P}(I)\setminus\{\emptyset\}} (-1)^{1+|J|}\left|\bigcap_{j\in J} A_j\right|$.

   Écrire explicitement cette égalité pour $n = 2$ et $n = 3$.

2) a) Montrer que $\sum_{J\in\mathcal{P}(I)\setminus\{\emptyset\}} (-1)^{1+|J|} = 1$ à l'aide de la première question. Que devient cette formule pour $I = \emptyset$?

   b) En déduire $\left|\bigcap_{i\in I} A_i\right| = \sum_{J\in\mathcal{P}(I)\setminus\{\emptyset\}} (-1)^{1+|J|}\left|\bigcup_{j\in J} A_j\right|$.

   Écrire explicitement cette égalité pour $n = 2$ et $n = 3$.

11 Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $p \in [\![0, n]\!]$.

1) Établir $\sum_{k=0}^{p} \binom{n}{k}\binom{n-k}{p-k} = 2^p\binom{n}{p}$ et pour $p > 0$, $\sum_{k=0}^{p}(-1)^k\binom{n}{k}\binom{n-k}{p-k} = 0$. On pourra utiliser la relation $\sum_{k=0}^{n}(-1)^k\binom{n}{k} = 0$ si $n > 0$.

2) Retrouver la première formule en dénombrant le nombre de couples (A, B) de parties de E, ensemble à n éléments, vérifiants $A \subset B$ et $|B| = p$.

12 ☞ 1) Établir pour $0 \leqslant p \leqslant n$, la formule $\sum_{k=p}^{n}\binom{k}{p} = \binom{n+1}{p+1}$. Interprétation sur le triangle de Pascal.

2) Calculer pour $n \geqslant 1$: $\sum_{k=1}^{n} k^2$ et $\sum_{k=1}^{n} k^3$.

3) Donner une expression simple de $1.2.3 + 2.3.4 + .3.4.5 + \ldots + n(n+1)(n+2)$.

13 ☞ **Applications croissantes.** Soit $1 \leqslant p \leqslant n$.

1) Quel est le nombre d'applications strictement croissantes de $[\![1, p]\!]$ dans $[\![1, n]\!]$.

2) Soit $f : [\![1, p]\!] \longrightarrow [\![1, n]\!]$ croissante. Montrer que l'application $g : [\![1, p]\!] \longrightarrow [\![1, n+p-1]\!]$ définie par $g(k) = f(k)+k-1$ pour tout $k \in [\![1, p]\!]$ est strictement croissante.

3) En déduire le nombre d'applications croissantes de $[\![1, p]\!]$ dans $[\![1, n]\!]$.

14 ☞ **Réseau $\mathbb{Z}^2$.** Soit $n \geqslant 1$. Quel est le nombre de couples $(x, y) \in \mathbb{Z}^2$ tels que :

a) $\max(|x|, |y|) \leqslant n$? b) $\max(|x|, |y|) = n$? c) $|x| + |y| \leqslant n$?

15 ★ Établir que pour $n \in \mathbb{N}$, on a $\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{\binom{n}{k}} = \frac{n+1}{2^{n+1}}\sum_{k=1}^{n+1}\frac{2^k}{k}$.

16 Pour $n \geqslant 1$, on note u_n le nombre de n-uplets $(x_1, \ldots, x_n)$ de $\{0, 1\}^n$ tels que pour tout $1 \leqslant i \leqslant n-1$, x_i et x_{i+1} ne sont jamais simultanément nuls. Montrer que $u_n = u_{n-1} + u_{n-2}$ pour tout $n \geqslant 3$.

17 ☞ Soit $n \geqslant 1$. Montrer que le nombre d'applications $f : [\![1, n]\!] \longrightarrow [\![1, n]\!]$ telles que $f \circ f = f$ est $\sum_{k=1}^{n}\binom{n}{k}k^{n-k}$.

18 Pour tout ensemble fini E de cardinal n, on note u_n le nombre d'applications $\sigma \in \mathcal{F}(E, E)$ telles que $\sigma^2 = \mathrm{id}_E$. Trouver une relation de récurrence entre les u_n.

19 **Utilisation de la formule du crible.** Une urne contient 4 boules numérotées de 1 à 4. Trouver le nombre de manière d'extraire successivement ces quatres boules de telle sorte que la boule p ne sorte pas au p-ème tirage ($1 \leqslant p \leqslant 4$).
Soit I un ensemble fini de cardinal n.

1) Pour tout $i \in I$, on note A_i l'ensemble des bijections de I sur I qui laisse invariant i (*i.e.* telles qu'elles associent i à i). En utilisant la formule du Crible, calculer $\left|\bigcup_{i\in I} A_i\right|$.

2) Conclure que le nombre de bijections de I sur I ne laissant invariant aucun élément de I est $\sum_{k=0}^{n}(-1)^k\frac{n!}{k!}$.

20 ☞ Soit $(x_1,\dots,x_n)\in\mathbb{N}^n$ et $p\in\mathbb{N}$ tel que $n\geqslant p^2+1$. Montrer que soit au moins $p+1$ des x_i sont égaux, soit au moins $p+1$ des x_i sont deux à deux distincts.

21 ★ Soit $p\leqslant n/2$. Combien y a-t-il de parties de $[\![1,n]\!]$ de cardinal p ne contenant pas deux entiers consécutifs ?

22 Soit $f:\mathbb{N}\longrightarrow\mathbb{N}$ strictement croissante. On suppose que pour tout $(p,q)\in\mathbb{N}^2$, on a $f(p\,q)=f(p)\,f(q)$ et $f(2)=2$. Démontrer que f est l'identité.

23 ☞ Soit E un ensemble fini, $f:E\longrightarrow E$. Pour tout $n\in\mathbb{N}$, on pose $E_n=f^n(E)$ ($f^n=f\circ f\circ\ldots\circ f$ avec n facteurs).

1) Montrer que $(E_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite décroissante et stationnaire de parties de E.
2) On pose $F=\displaystyle\bigcap_{n\in\mathbb{N}}E_n$ et pour tout $x\in F$, $g(x)=f(x)$. Montrer que g est une bijection de F sur F.

24 Soit E un ensemble non vide. Prouver qu'il y a équivalence entre :

(i) E est infini
(ii) pour toute application $f:E\longrightarrow E$, il existe $A\subset E$, $A\neq E$ et $A\neq\emptyset$ tel que $f(A)\subset A$.

25 **Quelques applications du principe des tiroirs.**

1) Soit $n\geqslant 1$ un entier. Montrer que n admet un multiple non nul qui ne s'écrit qu'avec des 0 et des 1 en écriture décimale (considérer les nombres $u_k=111\ldots11$ qui s'écrivent avec k chiffre 1, pour $k\in[\![1,n+1]\!]$).
2) Soit $n\geqslant 1$. Montrer que parmi n entiers naturels quelconques, on peut toujours en choisir certains (éventuellement un seul) dont la somme est un multiple de n.
3) Montrer que chaque matin dans la classe, il y a deux élèves qui serrent le même nombre de mains.
4) Soit A une partie de $[\![1,2n]\!]$ de cardinal $n+1$.
   a) Montrer qu'il existe deux entiers distincts a et b dans A tels que a divise b.
   b) Montrer qu'il existe a et b dans A premiers entre eux.

26 ★ **Théroème d'Erdös-Szekeres (1935).** Soit $(n,m)\in(\mathbb{N}^*)^2$. Soit $S=(u_1,u_2,\dots,u_{nm+1})$ une suite de $nm+1$ entiers distincts. Montrer que, soit il existe une sous-suite strictement décroissante de S d'au moins $m+1$ termes, soit il existe une sous-suite strictement croissante de S d'au moins $n+1$ termes. Pour cela, associer à chaque u_i un couple d'entier (s_i,r_i) avec s_i la taille de la sous-suite de S strictement croissante de longueur maximale terminant par u_i, et r_i la taille de la sous-suite de S strictement décroissante de longueur maximale terminant par u_i. Raisonner par l'absurde et appliquer le principe des tiroirs.

27 **Différence symétrique.** Soit E un ensemble. Pour toutes parties A et B, on appelle *différence symétrique* de A et B la partie $A\Delta B$ de E définie par :
$$A\Delta B=\left(A\cap\complement_E^B\right)\cup\left(\complement_E^A\cap B\right).$$
Soit A, B et C des parties de E.

1) Comparer $A\cap(B\Delta C)$ et $(A\cap B)\Delta(A\cap C)$. Même question en rempla cant $\cap$ par $\cup$.
2) Calculer $E\setminus(A\Delta B)$.

On dit que deux ensembles A et B sont *équipotents* s'il existe une bijection de A sur B.

28 Soit A, B et E trois ensembles.

1) Montrer que si A et B sont équipotents, alors $\mathcal{F}(E,A)$ et $\mathcal{F}(E,B)$ le sont aussi.
2) Montrer que $\mathcal{F}(E,\mathcal{F}(E,A))$ est équipotent à $\mathcal{F}(E^2,A)$.
3) Montrer que $\mathcal{P}(E)$ et $\mathcal{F}(E,\{0,1\})$ sont équipotents. En déduire que $\mathcal{F}(E,\mathcal{P}(E))$ et $\mathcal{F}(E^2,\{0,1\})$ sont équipotents.

29 ★ Soit E et F deux ensembles. Prouver que $\mathcal{P}(E\times F)$, $\mathcal{F}(F,\mathcal{P}(E))$ et $\mathcal{F}(E,\mathcal{P}(F))$ sont équipotents.

30 ★ Soit E un ensemble infini et $x\in E$. Montrer que E et $E\setminus\{x\}$ sont équipotents. Exhiber une bijection entre $[0,1]$ et $]0,1]$.