Université Paris Diderot **Économétrie**
Licence 3, 2012-2013 **Vianney Perchet - Aurélie Fischer**

T.D. 9 : Introduction à l'utilisation des variables instrumentales

---

Dans ce T.D., on s'intéresse au cas où l'hypothèse d'indépendance entre les variables explicatives et le bruit est violée. La méthode des ***variables instrumentales*** *permet de résoudre ce problème. On l'étudie dans l'Exercice 1 dans un cas théorique simple, et dans l'Exercice 2 sur un exemple.*

Exercice 1. On suppose que l'on observe deux variables X et Y reliées par l'équation

$$Y_i = bX_i + \varepsilon_i \tag{1}$$

pour $i = 1, ..., n$, où les couples (X_i, ε_i) sont i.i.d. de loi

$$\begin{pmatrix} X_i \\ \varepsilon_i \end{pmatrix} \sim \mathcal{N}\left(\begin{pmatrix} m_X \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \sigma_X^2 & \gamma \\ \gamma & \sigma^2 \end{pmatrix}\right)$$

avec $\gamma \neq 0$. On rappelle que l'estimateur des moindres carrés de b est donné par

$$\hat{b} = \frac{\sum_{i=1}^n X_i Y_i}{\sum_{i=1}^n X_i^2}.$$

1) Quelle hypothèse usuelle est ici violée ?
2) Montrer que
$$\hat{b} = b + \frac{\sum_{i=1}^n \varepsilon_i X_i}{\sum_{i=1}^n X_i^2}.$$
3) L'estimateur $\hat{b}$ est-il sans biais ?
4) Déterminer sa limite quand la taille de l'échantillon tend vers l'infini. Est-il consistant ?
5) Un économètre astucieux observe qu'une autre variable, Z, vérifie pour tout i,
$$X_i = aZ_i + \eta_i \tag{2}$$
où les couples (Z_i, η_i) sont i.i.d. de loi
$$\begin{pmatrix} Z_i \\ \eta_i \end{pmatrix} \sim \mathcal{N}\left(\begin{pmatrix} m_Z \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} s_Z^2 & 0 \\ 0 & s^2 \end{pmatrix}\right).$$
De plus, tous les Z_i sont indépendants de tous les ε_i.
Déterminer la loi des couples (ε_i, η_i).
6) On estime le paramètre a par moindres carrés, rappeler l'expression de $\hat{a}$.
7) On pose comme d'habitude $\hat{X}_i = \hat{a}Z_i$ et on propose alors l'estimateur suivant de b :
$$\hat{b}^{\mathrm{VI}} = \frac{\sum_{i=1}^n Y_i \hat{X}_i}{\sum_{i=1}^n \hat{X}_i^2}.$$
Montrer que
$$\hat{b}^{\mathrm{VI}} = b + \frac{\sum_{i=1}^n \varepsilon_i Z_i}{\sum_{i=1}^n X_i Z_i} = b + \frac{\sum_{i=1}^n \varepsilon_i Z_i}{\sum_{i=1}^n \hat{X}_i Z_i}.$$

8) L'estimateur $\hat{b}^{\mathrm{VI}}$ est-il sans biais ? Est-il consistant ?

Remarque : $\hat{b}^{\mathrm{VI}}$ s'appelle estimateur à variable instrumentale, la variable Z s'appelle la variable instrumentale. Il est fréquent d'utiliser plusieurs variables instrumentales, mais c'est plus difficile.

Exercice 2. On s'intéresse ici à un problème d'économie (avec de fausses données). Ici crois_i est la croissance d'un pays i en 2012, et prev_i est la prévision de croissance qu'un célèbre magazine économique avait attribué à ce pays pour 2012.

i	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
prev_i	-0,22	-0,89	0,09	-0,17	-0,81	-0,35	2,12	2,92	-0,57	-0,35
crois_i	0,23	0,45	-1,74	-0,48	-0,1	-2,24	2,16	2,14	0,04	-1,04
Z_i	-1,41	-0,59	-1,32	1,4	-0,06	-0,56	1,41	0,84	-0,61	-0,79

On donne

$$\sum_{i=1}^{10} \mathrm{prev}_i \mathrm{crois}_i = 11,5081, \sum_{i=1}^{10} \mathrm{prev}_i^2 = 15,1243, \sum_{i=1}^{10} \mathrm{prev}_i Z_i = 6,7893 \text{ et } \sum_{i=1}^{10} \mathrm{crois}_i Z_i = 7,9358.$$

Un économètre part du principe que les prédictions trouvées dans la presse ont une influence (idée de la « prophétie auto-réalisatrice » en économie) et postule le modèle

$$\mathrm{crois}_i = b\,\mathrm{prev}_i + \varepsilon_i. \tag{3}$$

Cependant, un autre économètre se rend compte que les notes attribuées par le magazine sont liées aux croissances de l'année précédente (2011), que l'on notera Z_i :

$$\mathrm{prev}_i = aZ_i + \eta_i.$$

1) Expliquer pourquoi, dans le modèle donné par l'Equation (3), on attend $\mathrm{Cov}(\mathrm{prev}_i, \varepsilon_i) \neq 0$.
2) D'après l'exercice précédent, quelle en sera la conséquence sur l'estimation de b ?
3) Calculer les estimateurs $\hat{b}$ (moindres carrés ordinaires) et $\hat{b}^{\mathrm{VI}}$ (avec la variable instrumentale Z_i) et conclure.