**Université Paris Diderot** — **Économétrie**
**Licence 3, 2012-2013** — **Vianney Perchet - Aurélie Fischer**

---

## T.D. 2 : Modèle linéaire simple

---

*Ce T.D. est consacré au modèle linéaire simple : le premier exercice est l'occasion d'un rappel de cours et d'une application numérique, le deuxième propose l'étude complète d'un modèle légèrement différent (sans constante).*

**Exercice 1. Application du modèle linéaire simple.** On souhaite modéliser $y$ le rendement de maïs (en quintaux) d'une parcelle de terrain en fonction de $x$ la quantité d'engrais utilisée (en kilogrammes). Voici les données complètes :

| $i$ | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $x_i$ | 16 | 18 | 23 | 24 | 28 | 29 | 26 | 31 | 32 | 34 |
| $y_i$ | 20 | 24 | 28 | 22 | 32 | 28 | 32 | 36 | 41 | 41 |

On donne les quantités suivantes :

$$\sum x_i = 261 \ , \ \sum x_i^2 = 7127 \ , \ \sum y_i = 304 \text{ et } \sum x_i y_i = 8286.$$

Soit le modèle linéaire

$$y_i = b_0 + b_1 x_i + \varepsilon_i$$

avec les hypothèses usuelles vues en cours.

1) Rappeler la définition des estimateurs des moindres carrés de $b_0$ et $b_1$ et les formules permettant de les calculer.
2) Donner la valeur des estimateurs $\hat{b}_0$ et $\hat{b}_1$.
3) Quel rendement prévoit le modèle pour une parcelle ayant reçu 20kg d'engrais ?
4) Pour une augmentation $\Delta x = 1$kg d'engrais, quelle est l'augmentation estimée du rendement $\Delta y$ ?

**Exercice 2. Modèle linéaire simple sans constante.** On s'intéresse dans cet exercice au modèle suivant :

$$\forall i \in \{1, ..., n\}, \quad y_i = b x_i + \varepsilon_i,$$

avec les hypothèses

- **(H0)** Les valeurs des $x_i$ sont supposées déterministes ;
- **(H1)** Les $\varepsilon_i$ sont aléatoires avec $\mathbb{E}(\varepsilon_i) = 0$ ;
- **(H2)** Les $\varepsilon_i$ sont indépendants les uns des autres ;
- **(H3)** Pour tout $i$, $\mathrm{Var}(\varepsilon_i) = \sigma^2$ ;
- **(H4)** Les $\varepsilon_i$ sont gaussiens.

1) On souhaite calculer l'estimateur des moindres carrés de $b$. On définit $\hat{b}$ comme une valeur qui minimise la somme de carrés

$$\sum_{i=1}^{n} (y_i - b x_i)^2.$$

Quelle est la condition sur les $x_i$ sous laquelle ce minimum est unique ? Que vaut alors $\hat{b}$ ? On appellera **(H5)** cette hypothèse et on la supposera vérifiée dans la suite.

2) Déterminer la loi de $\hat{b}$.

3) Application : on souhaite modéliser la consommation totale en France $C_i$ lors de l'année $i$ à partir du revenu intérieur brut $PIB_i$ lors de cette année. On suppose que leurs taux de croissance sont reliés par l'équation suivante :

$$\frac{C_i - C_{i-1}}{C_{i-1}} = b\frac{PIB_i - PIB_{i-1}}{PIB_{i-1}} + \varepsilon_i$$

et on pose

$$x_i = \frac{PIB_i - PIB_{i-1}}{PIB_{i-1}} \text{ et } y_i = \frac{C_i - C_{i-1}}{C_{i-1}}.$$

On trouve dans la revue Perspectives Economiques (de l'OCDE, numéro de décembre 1999) les données reportées ici :

| $i$ | 1981 | 1982 | 1983 | 1984 | 1985 | 1986 | 1987 | 1988 | 1989 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $x_i$ | 1,2 | 2,5 | 0,7 | 1,3 | 1,9 | 2 | 2,5 | 4,2 | 4,3 |
| $y_i$ | 2,1 | 3,5 | 0,9 | 1,1 | 2,4 | 3,2 | 2,8 | 2,3 | 3,1 |
| $i$ | 1990 | 1991 | 1992 | 1993 | 1994 | 1995 | 1996 | 1997 | 1998 |
| $x_i$ | 2,6 | 1,1 | 1,4 | -1 | 1,8 | 1,8 | 1,2 | 2 | 3,4 |
| $y_i$ | 2,7 | 0,8 | 0,8 | -0,3 | 0,8 | 1,4 | 1,4 | 0,2 | 3,6 |

On donne les quantités suivantes :

$$\sum x_i = 34,9 \;,\; \sum x_i^2 = 94,27 \;,\; \sum y_i = 32,8 \text{ et } \sum x_i y_i = 81,88.$$

Calculer l'estimateur $\hat{b}$ et discuter la valeur obtenue.

4) Dans l'application précédente, on peut contester la pertinence de l'hypothèse **(H0)**. Pourquoi ?

5) On se propose d'étudier une variante du modèle précédent : on remplace **(H0)** par **(H0')** : les $x_i$ sont iid, indépendants des $\varepsilon_i$ et $0 < \mathbb{E}(x_i^2) < +\infty$. Démontrer que l'on a toujours $\mathbb{E}(\hat{b}) = b$, calculer $\mathrm{Var}(\hat{b})$. Montrer enfin que

$$\hat{b} \xrightarrow[n\to\infty]{p.s.} b.$$