I. Révisions de Probabilité

I.1. Exercice. Soit (X_n) une suite de variables aléatoires réelles de densité f_n et X une variable aléatoire réelle de densité f.

(1) Montrer que si (f_n) converge vers f presque partout, alors (f_n) converge vers f dans L^1 et $X_n \xrightarrow{\mathscr{L}} X$.

(2) Montrer que la réciproque est fausse.
(Par exemple, à l'aide de la suite de densités $f_n(x) = [1 - sin(2\pi n x)]1_{[0,1]}(x)$.)

I.2. Exercice. Soit (X_n) une suite de variables aléatoires réelles bornées par une même constante. Montrer que si (X_n) converge en probabilité, alors (X_n) converge dans L^p pour tout $p \geq 1$.

I.3. Exercice. Soit (X_n) une suite de v.a.r. i.i.d. centrées et de carré intégrable. Montrer que si $\mathrm{Var}(X_1) > 0$ alors les v.a.

$$Y_n = \frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{i=1}^{n} X_i$$

ne convergent pas en probabilité quand $n \to \infty$. (On pourra étudier la suite $Y_{2n} - Y_n$.)

I.4. Exercice. Lors d'une expérience numérique, on décide d'arrondir tous les résultats d'opérations en utilisant J chiffres après la virgule (c'est-à-dire d'arrondir à $\frac{1}{2}10^{-J}$ près). On effectue 10^6 opérations élémentaires successives et on suppose que les erreurs commises pour chacune des opérations sont indépendantes, de loi uniforme sur $[-\frac{1}{2}10^{-J}, \frac{1}{2}10^{-J}]$. On suppose de plus que l'erreur sur le résultat final est la somme des erreurs commises sur chaque opération. Proposer une majoration de la probabilité pour que l'erreur finale soit supérieure ou égale à $\frac{1}{2}10^{-J+3}$.

I.5. Exercice. Montrer que si $X \sim \mathcal{N}(0,1)$ alors, pour tout $t > 0$:

$$P\{X > t\} \leq \frac{1}{\sqrt{2\pi} \cdot t} \exp\left(-\frac{t^2}{2}\right).$$

I.6. Simulation par inversion.

(1) Si U suit une loi uniforme sur $[0,1]$, quelle est la loi de

$$X = -\log(U) \quad \text{et} \quad Y = \tan\left(\pi(U - \tfrac{1}{2})\right) ?$$

(On vérifiera d'abord que X et Y sont bien définies.)

(2) On considère une variable aléatoire X de fonction de répartition F_X dont on connaît explicitement la fonction

$$F_X^-(t) = \inf\{u \in \mathbb{R},\ F_X(u) \geq t\}, \quad 0 < t < 1$$

(a) Montrer que $F_X^-(t)$ est un réel bien défini pour $t \in]0,1[$ et montrer l'équivalence (où $u \in \mathbb{R}$)

$$F_X^-(t) \leq u \iff t \leq F_X(u)$$

(b) Calculer la loi de $F_X^{-1}(U)$ si U suit la loi uniforme sur $[0,1]$.

(c) Retrouver alors les résultats de la question (1).

I.7. Exercice. (Méthode d'inversion pour une v.a. discrète) Soit X une v.a. discrète à valeurs dans $\mathbb{N}$. On pose $p_k = P\{X = k\}$ et $P_k = P\{X \leq k\}$.

(1) On définit pour $t \in]0, 1[$:

$$i(t) = \min\{j \geq 0 : P_j \geq t\}.$$

Montrer que $i(t) = F_X^-(t)$ et que $i(t)$ est l'unique entier tel que $P_{i(t)-1} < t \leq P_{i(t)}$.

(2) En déduire ce que produit la fonction R suivante :

```
poisson<-function(t){
 P<-exp(-t)
 p<-P
 k<-0
 u<-runif(1)
 while (u>P){
  p<-p*t/(k+1)
  P<-P+p
  k<-k+1
  }
k}
```

(3) Quel est le nombre moyen de boucles de l'algorithme ?

I.8. Exercice*. (Méthode de rejet)

(1) Cas simple : Soit f une densité de probabilité sur $[0, 1]$ et $a > 0$ tel que $\sup_{x\in[0,1]} f(x) \leq a$. Soit $(U_i, V_i)_{i\in\mathbb{N}}$ une suite de vecteurs aléatoires i.i.d. de loi uniforme sur $[0, 1]\times[0, 1]$. On définit

$$T = \inf\{i \geq 0 \ ; \ aV_i \leq f(U_i)\}, \quad \text{avec } \inf\emptyset := +\infty.$$

(a) Montrer que $P\{aV_0 > f(U_0)\} = 1 - \frac{1}{a}$. En déduire que T est p.s. finie.

(b) Pour φ borélienne positive et $i \geq 1$, montrer que

$$\mathrm{E}\{\varphi(U_i)1_{[aV_i\leq f(U_i)]}\} = \frac{1}{a}\int_{[0,1]} f(v)\varphi(v)dv.$$

(c) En déduire $\mathrm{E}\{\varphi(U_T)\}$ pour φ borélienne positive. Interprétation.

(d) Que produit la fonction R ci-dessous ?

```
rejet<-function(){
 u<-runif(1)
 v<-runif(1)
 while (2*v>=(1-sin(4*pi*u))){
  u<-runif(1)
  v<-runif(1)
 }
u
}
```

(2) Cas général : Soient f et g deux densités de probabilité sur $[0,1]$, telles que $g(x) > 0$ pour tout $x \in [0,1]$ et :

$$\forall x \in [0,1] \ : \ \ f(x) \leq a g(x).$$

Soient $(U_i, V_i)_{i \in \mathbb{N}}$ une suite de variables aléatoires i.i.d. telle que :
(a) U_i et V_i sont indépendantes.
(b) U_i a pour densité g et V_i est uniforme sur $[0,1]$.
On pose

$$T = \inf\{i \geq 0 \ ; \ aV_i \, g(U_i) \leq f(U_i)\}, \qquad \inf \emptyset := +\infty.$$

Montrer que U_T a pour densité f. Discuter la pertinence de cette méthode en pratique en calculant le nombre moyen de boucles d'un algorithme du même du type que celui de (1).

I.9. **Exercice*.** Soit (X_n) une suite de variables aléatoires réelles qui converge en loi vers X et dont la fonction de répartition F est supposée continue. Montrer que pour tous $a, b \in \mathbb{R}$ on a

$$\lim_{n \to \infty} P\big(X_n \in [a,b]\big) = P\big(X \in [a,b]\big).$$

I.10. **Exercice*.** Pour $a > 0$ et $b > 0$, la densité γ de la loi Gamma(a,b) est définie par

$$\gamma_{(a,b)}(x) = \frac{1}{\Gamma(a)} b^a \exp(-bx) x^{a-1} 1_{\{x>0\}},$$

où $\Gamma(a) = \int_0^\infty e^{-x} x^{a-1} dx$.

(1) Soit X de loi Gamma(a,b), calculer $\mathrm{E}\{X\}$ et $\mathrm{Var}\{X\}$.
(2) Calculer la transformée de Laplace $t \rightsquigarrow \mathrm{E}\{e^{-tX}\}$ de la loi Gamma.
(3) On considère deux variables aléatoires indépendantes X_1 et X_2, de loi Gamma(a_1, b) et Gamma(a_2, b). Déduire du calcul de la transformée de Laplace de $X_1 + X_2$ la loi de $X_1 + X_2$.
(4) Soit $(X_1, \ldots, X_n)$ un n-échantillon de la loi $\mathcal{N}(0,1)$. Quelle est la densité de $X_1^2 + \ldots + X_n^2$? (On pourra d'abord exprimer la densité de X_1^2 via le calcul de sa transformée de Laplace.)

I.11. **Exercice.** Montrer que toute limite en loi d'une suite de variables aléatoires gaussiennes est une variable aléatoire gaussienne de moyenne (resp. variance) la limite des moyennes (resp. variances).