Université Paris Diderot
Licence 3, 2012-2013

Économétrie
Vianney Perchet - Aurélie Fischer

Eléments de correction T.D. 2 et 3

Exercice 2 du TD 2 : Cas où les x_i ne sont pas déterministes, mais sont indépendants des ε_i.

On a $\hat{b} = b + \sum \frac{x_i \varepsilon_i}{\sum x_i^2}$, qui a pour espérance b puisque les x_i et ε_i sont indépendants et les ε_i sont centrés. La variance de $\hat{b}$ vaut $\mathbb{E}\left(b + \sum \frac{x_i \varepsilon_i}{\sum x_i^2}\right)^2 - b^2 = b^2 + \mathbb{E}\left[\frac{\sum x_i^2 \varepsilon_i^2}{(\sum x_i^2)^2}\right] - b^2 = \sigma^2 \mathbb{E}\left[\frac{1}{\sum x_i^2}\right]$. Pour montrer que $\hat{b}$ tend presque sûrement vers b, il suffit de vérifier que $\frac{\sum x_i \varepsilon_i}{\sum x_i^2}$ tend presque sûrement vers 0. Or, par la loi des grands nombres, $1/n \sum x_i \varepsilon_i$ tend vers 0 p.s. et $1/n \sum x_i^2$ tend vers $\mathbb{E}[x_i^2] > 0$ p.s., d'où le résultat par le lemme de Slutsky.

Exercice 2 du TD 3 : Intervalles de confiance au niveau de confiance 95% pour les paramètres d'espérance b_0, b_1 et b_2.

On a

$$\frac{\|Y - X\hat{b}\|^2}{\sigma^2} \sim \chi^2(n-3)$$
$$\hat{b} \sim \mathcal{N}(b, \sigma^2({}^tXX)^{-1}),$$

donc, pour tout $k = 0, \dots, 2$,

$$\hat{b}_k \sim \mathcal{N}(b, \sigma^2 c_{kk}),$$

où $c_{kk} = ({}^tXX)^{-1}_{kk}$ (terme diagonal d'indice k de la matrice $({}^tXX)^{-1}$).

Ainsi,

$$\frac{\sqrt{n-3}(\hat{b}_k - b_k)}{\|Y - X\hat{b}\|\sqrt{c_{kk}}} \sim Student(n-3).$$

En notant t_α le quantile d'ordre $1-\alpha$ de la loi de Student à $n-3$ degrés de liberté (c'est-à-dire $P(|T| \le t_\alpha) = 1 - \alpha$ où $T \sim Student(n-3)$), on obtient alors

$$P\left(-t_\alpha \le \frac{\sqrt{n-3}(\hat{b}_k - b_k)}{\|Y - X\hat{b}\|\sqrt{c_{kk}}}) \le t_\alpha\right) = 1 - \alpha,$$

d'où les intervalles de confiance

$$IC_{1-\alpha}(b_k) = \left[\hat{b}_k - t_\alpha \|Y - X\hat{b}\| \sqrt{\frac{c_{kk}}{n-3}}, \hat{b}_k + t_\alpha \|Y - X\hat{b}\| \sqrt{\frac{c_{kk}}{n-3}}\right].$$

Ici, $n = 20$, $\alpha = 0.05$ et $t_\alpha = 2.1098$. On trouve :

$IC(b_0) = [\hat{b}_0 \pm t_{0.05} s \times \sqrt{2.10224}] = [98.80 \pm 2.1098 \times 1.1538 \times 1.44991] = [95.27, 102.33]$.
$IC(b_1) = [\hat{b}_1 \pm t_{0.05} s \times \sqrt{2.1815.10^{-4}}] = [-0,382 \pm 2.1098 \times 1.1538 \times 0.01477] = [-0.418, -0.346]$.
$IC(b_2) = [\hat{b}_2 \pm t_{0.05} s \times \sqrt{0.2780473}] = [-1,813 \pm 2.1098 \times 1.1538 \times 0.52730] = [-3.097, -0.53]$.