MA4−Mathématiques−2012-2013

Feuille de TD n°5

Topologie

Exercice 1. : Représenter sur un même graphique les boules unité des normes $\| \,.\, \|_p$ de $\mathbb{R}^2$ pour les valeurs $p = 1, 2, \infty$. Prouver que pour tout $u \in \mathbb{R}^2$ on a

$$\|u\|_\infty \leq \|u\|_2 \leq \|u\|_1 \leq 2\|u\|_\infty$$

Exercice 2. On considère l'application $N : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}_+$ définie par :

$$N(x, y) = |x| + \sqrt{x^2 + y^2}.$$

1. Montrer que N est une norme sur $\mathbb{R}^2$.
2. Déterminer des réels $A > 0$ et B tels que pour tout vecteur $v \in \mathbb{R}^2$:

$$A\,\|v\| \leq N(v) \leq B\,\|v\|,$$

où $\| \cdot \|$ désigne la norme euclidienne de $\mathbb{R}^2$.

Exercice 3. : Reprendre l'exercice précédent, lorsque l'application N est définie par :

$$N(x, y) = \sqrt{x^2 + xy + y^2}.$$

Exercice 4. On considère l'application $N : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}_+$ définie par

$$N(x, y) = \sup_{t \in [0,1]} |x + ty|$$

Montrer que N est une norme et dessiner sa boule unité.

Exercice 5. : Pour quelles valeurs du réel λ définit-on une norme par

$$N(x, y) = \sqrt{x^2 + 2\lambda xy + y^2} \quad ?$$

Exercice 6. On considère l'application $N : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ définie par $N(x, y) = \max(|2x + y|, |x + 2y|)$.

1. Montrer que N est une norme sur $\mathbb{R}^2$.
2. Montrer que $\|v\|_\infty \leq N(v) \leq 2\|v\|_1$ pour tout $v \in \mathbb{R}^2$.

Exercice 7. Quels intervalles de $\mathbb{R}$ sont-ils des parties ouvertes de $\mathbb{R}$? des parties fermées de $\mathbb{R}$?

Exercice 8. Les parties suivantes de $\mathbb{R}^2$ sont-elles ouvertes ? fermées ? bornées ?

$$A = \big\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \,;\, y \geq 0\big\}, \qquad B = \big\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \,;\, y > 0\big\},$$
$$C = \big\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \,;\, 0 \leq x \leq 1 \text{ et } y = 0\big\}, \qquad D = \big\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \,;\, 0 < x < 1 \text{ et } y = 0\big\},$$
$$E = \big\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \,;\, x^2 + 2y^2 < 1\big\}, \qquad F = \big\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \,;\, x^2 - y^2 = 1\big\},$$
$$G = \big\{(x, y) \in \,]0, \pi] \times \mathbb{R} \,;\, y = \cos(1/x)\big\}, \qquad H = G \cup \{0\} \times [-1, 1].$$

Exercice 9. Soit $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ le $\mathbb{R}$-espace vectoriel des matrices carrées d'ordre n à coefficients réels. Les parties suivantes de $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ sont-elles ouvertes ? fermées ? bornées ?

$$GL_n(\mathbb{R}) = \big\{M \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R}) \,;\, M \text{ inversible}\big\}, \qquad SL_n(\mathbb{R}) = \big\{M \in GL_n(\mathbb{R}) \,;\, \det M = 1\big\},$$
$$O_n(\mathbb{R}) = \big\{M \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R}) \,;\, {}^tM.M = I_n\big\}, \qquad SO_n(\mathbb{R}) = \big\{M \in O_n(\mathbb{R}) \,;\, \det M = 1\big\},$$
$$S_n(\mathbb{R}) = \big\{M \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R}) \,;\, {}^tM = M\big\}.$$

Exercice 10. Soit A une partie de $\mathbb{R}^m$ et $f : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$ une application continue.

1. Montrer l'inclusion $f(\overline{A}) \subset \overline{f(A)}$, où $\overline{A}$ et $\overline{f(A)}$ désignent respectivement les adhérences de A et de $f(A)$.
2. Supposons que la fonction f est surjective. Prouver que si A est dense dans $\mathbb{R}^m$, c'est-à-dire telle que $\overline{A} = \mathbb{R}^m$, alors $f(A)$ est dense dans $\mathbb{R}^n$.

Exercice 11. Déterminer si les ensembles suivants sont ou ne sont pas compacts :

$$\begin{array}{ll} A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2,\, x^2 + y^4 = 1\} & B = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2,\, x^2 + y^5 = 1\} \\ C = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2,\, x^2 + xy + y^2 \leq 1\} & D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2,\, x^2 + 8xy + y^2 = 1\} \\ E = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2,\, y^2 = x(1-2x)\} & \end{array}$$

Exercice 12.

1. Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction continue telle que $\lim_{|x|\to\infty} f(x) = +\infty$. Montrer que f admet un minimum.
2. Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}_+$ une fonction continue telle que $\lim_{|x|\to\infty} f(x) = 0$. Montrer que f admet un maximum.

Exercice 13. Soit E un espace vectoriel normé. Si A et B sont deux parties de E, on définit l'ensemble $A + B$ par

$$A + B \;=\; \{a + b,\, a \in A \text{ et } b \in B\}\,.$$

1. Montrer que si A est compact et B est fermé, $A + B$ est fermé.
2. Donner un exemple de deux fermés de $\mathbb{R}^2$ dont la somme n'est pas fermée.

Exercice 14. Soit $(E, \|.\|)$ un espace vectoriel normé. Soit (x_n) une suite convergente de E et x sa limite. Montrer que l'ensemble

$$A = \{x\} \cup \{x_n,\, n \in \mathbb{N}\}$$

est compact.