TP nº 1. Simulation de variables aléatoires

Ce TP introduit les premiers outils utilisés en Python pour la simulation de variables aléatoires.

Autour de la fonction `random()`

La bibliothèque standard de Python inclut le module `random` qui permet de simuler des variables aléatoires. On va donc commencer notre programme par la ligne

```
from random import *
```

Un appel à la fonction `random()` renvoie un nombre choisi uniformément dans $[0,1]$, c'est-à-dire une réalisation de la variable aléatoire $U \sim \mathscr{U}([0,1])$.

1. Afficher 10 appels à la fonction `random()`.
2. Stocker $N = 10\,000$ réalisations de U dans une liste **v**, et afficher un histogramme de **v**.
3. Stocker $N = 10\,000$ réalisations de U^2 dans une liste **w**, et afficher un histogramme de **w**.

Variables aléatoires discrètes

Exercice 1. Pile ou Face.

a) Écrire une fonction `PileFace` qui prend en argument un réel $p \in [0,1]$ et renvoie une réalisation d'une variable aléatoire X qui vaut $+1$ avec probabilité p et -1 avec probabilité $1-p$.

b) Afficher 10 tirages de `PileFace(p)` avec $p = 0.1$, $p = 0.6$.

c) Prendre $p = 0.4$. Stocker $k = 100$ réalisations de `PileFace(p)` dans une liste **x**, et réaliser un histogramme de **x**. Répétez avec $k = 10\,000$.

Exercice 2. Loi uniforme. Montrer que si U suit une loi uniforme sur $[0,1]$ alors la partie enière de nU suit une loi uniforme sur $\{0,\dots,n-1\}$. La partie entière d'un réel `x` est donnée par `int(x)`.

a) Écrire une fonction `Unif` qui prend en argument un entier n et renvoie une réalisation d'une variable aléatoire uniforme sur $\{0,\dots,n-1\}$.

b) Afficher 10 tirages de `Unif(n)` pour $n = 10$ et $n = 50$.

c) Prendre $n = 30$. Stocker $k = 10\,000$ réalisations de `Unif(n)` dans une liste **x**, et réaliser un histogramme de **x**.

Exercice 3. Loi géométrique. On rappelle que si $(X_i)_{i\geq 1}$ est une suite de variables indépendantes de loi de Bernouilli de paramètre p, alors l'indice T de la première variable égale à 1 suit une loi géométrique de paramètre p.

a) Écrire une fonction `Geom` qui prend en argument un réel $p \in [0,1]$ et renvoie une réalisation de la variable aléatoire X qui suit la loi géométrique de paramètre p. (Indication : utiliser une boucle `while`.)

b) Prendre $p = 0.4$. Stocker $k = 10\,000$ réalisations de `Geom(p)` dans un vecteur **x**, et réaliser un histogramme de **x** auquel on superposera les probabilités théoriques.

Variables aléatoires continues

Exercice 4. Loi exponentielle. On rappelle que si U suit la loi uniforme sur $[0,1]$, alors $-\frac{1}{a}\ln U$ suit la loi exponentielle de paramètre a.

a) Écrire une fonction `Expo` qui prend en argument un réel $a > 0$ et renvoie une réalisation d'une variable aléatoire qui suit la loi Exponentielle de paramètre a.

b) Afficher 10 tirages de `Expo(`a`)` pour $a = 0.5$ puis pour $a = 2$.

c) Prendre $a = 0.5$. Stocker $k = 10\,000$ réalisations de `Expo(a)` dans un vecteur $\mathbf{x}$, et réaliser un histogramme de $\mathbf{x}$ auquel on superposera la densité théorique $f(x) = ae^{-ax}\mathbf{1}_{\mathbb{R}_+}(x)$.

Exercice 5. Loi de Pareto. Une variable aléatoire X suit la loi de Pareto de paramètre b si sa loi possède la densité

$$f(x) = bx^{-(1+b)}\mathbf{1}_{\{x>1\}}.$$

a) Montrer que la fonction de répartition de X est $F(x) = (1-x^{-b})\mathbf{1}_{\{x>1\}}$, et calculer $F^{-1}(t)$. Montrer que si U est une variable aléatoire uniforme sur $[0,1]$, alors $F^{-1}(U)$ suit la loi de Pareto de paramètre b.

b) Écrire une fonction `Pareto` qui prend en argument un réel $b > 0$ et renvoie une réalisation d'une variable aléatoire qui suit la loi de Pareto de paramètre b.

c) Prendre $b = 1.5$. Stocker $k = 10\,000$ réalisations de `Pareto(b)` dans un vecteur $\mathbf{x}$, et réaliser un histogramme de $\mathbf{x}$ auquel on superposera la densité théorique $f(x) = bx^{-(1+b)}\mathbf{1}_{\{x>1\}}$.

Pour aller plus loin

Exercice 6. Loi de Cauchy. On rappelle que si U suit la loi uniforme sur $[0,1]$, alors $V = \pi(X - \frac{1}{2})$ suit la loi uniforme sur $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$, et $\tan(V)$ suit la loi de Cauchy standard, dont la densité est donnée par $f(x) = \frac{1}{\pi(1+x^2)}$.

a) Écrire une fonction `Cauchy` qui renvoie une réalisation d'une variable aléatoire qui suit la loi de Cauchy.

b) Stocker $k = 10\,000$ réalisations de `Cauchy()` dans un vecteur $\mathbf{x}$, et réaliser un histogramme de $\mathbf{x}$ auquel on superposera la densité théorique $f(x) = \frac{1}{\pi(1+x^2)}$.

c) On cherche à comprendre la loi de la somme de deux variables aléatoires de Cauchy indépendantes. Stocker $k = 10\,000$ réalisations de `Cauchy()+Cauchy()` dans un vecteur $\mathbf{y}$, et réaliser un histogramme de $\mathbf{y}$. Qu'avez-vous envie de conjecturer ? Superposer la densité conjecturée à l'histogramme pour appuyer cette conjecture.

Exercice 7. Maximum de variables de Pareto On considère une suite de variables aléatoires $(X_n)_{n\geq 1}$ indépendantes, de loi de Pareto de paramètre b. On définit $M_n = \max\{X_1, \dots, X_n\}$.

a) Écrire une fonction `Maximum(b,n)` qui prend en argument un réel positif b et un entier n et renvoie une réalisation de M_n.

b) Prendre $b = 2$. Stocker $k = 10\,000$ réalisations de $\frac{1}{\sqrt{1000}}M_{1000}$ dans un vecteur $\mathbf{x}$, et afficher un histogramme de $\mathbf{x}$. Comparer avec la densité $f(x) = 2x^{-3}e^{-1/x^2}\mathbf{1}_{x>0}$.

c) Prendre $b = 0.5$. Stocker $k = 10\,000$ réalisations de $\frac{1}{(1000)^2}M_{1000}$ dans un vecteur $\mathbf{x}$, et afficher un histogramme de $\mathbf{x}$. Comparer avec la densité $f(x) = \frac{1}{2}x^{-3/2}e^{-1/\sqrt{x}}\mathbf{1}_{x>0}$.

d) Que pouvez-vous conjecturer ? Testez votre conjecture.