Série d'exercices n° 8. Convergence de variables aléatoires I

Une étoile désigne un exercice important.

Modes de convergence

Exercice 8.1. Soit $(X_n)_{n\geq 1}$ une suite de variables aléatoires indépendantes, de même loi donnée par $\frac{1}{n}\delta_{\sqrt{n}} + (1-\frac{1}{n})\delta_0$. Étudier les différents modes de convergence de la suite $(X_n)_{n\geq 1}$.

Solution. On a $\lim_{n\to\infty} \mathbb{P}(X_n = 1) = 0$, et $\lim_{n\to\infty} \mathbb{P}(X_n = 0) = 1$, donc la suite X_n converge en loi vers 0 (c'est-à-dire la suite des lois de X_n converge étroitement vers la mesure δ_0).

Soit $\varepsilon > 0$. Pour $\varepsilon \geq 1$, $\mathbb{P}(|X_n| > \varepsilon) = 0$, et pour $0 < \varepsilon < 1$, $\mathbb{P}(|X_n| > \varepsilon) = \mathbb{P}(X_n = 1) = \frac{1}{n} \to_{n\to\infty} 0$. Donc X_n converge en probabilité vers 0.

Comme $\mathbb{P}(X_n = 1) = \frac{1}{n}$, on a $\sum_{n\geq 1} \mathbb{P}(X_n = 1) = +\infty$. Les v.a. X_n étant indépendantes, par Borel-Cantelli, on obtient $\mathbb{P}(\limsup_n X_n = 1) = 1$, c'est à dire que $\mathbb{P}$-p.s., la suite X_n prend une infinité de fois la valeur 1. Donc X_n ne peut pas converger presque sûrement vers 0.

Pour tout $1 \leq p < +\infty$, $\left(\mathbb{E}(|X_n|^p)\right)^{1/p} = (\frac{1}{n})^{1/p} \to 0$, quand $n \to \infty$. Donc, X_n converge en norme L^p vers 0.

Exercice 8.2. Soit X une v.a. de loi uniforme sur $[0, 1]$. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, et tout $\omega \in \Omega$, on pose

$$Y_n(\omega) = n \quad \text{si} \quad 0 \leq X(\omega) \leq 1/n \qquad \text{et} \qquad Y_n(\omega) = 0 \quad \text{si} \quad X(\omega) > 1/n\,.$$

1. La suite $(Y_n)_{n\geq 0}$ converge-t-elle presque sûrement ?
2. La suite $(Y_n)_{n\geq 0}$ converge-t-elle en loi ?
3. La suite $(Y_n)_{n\geq 0}$ converge-t-elle dans L^1 ?

Solution.

1. On a $\lim_{n\to\infty} Y_n(\omega) = 0$ si et seulement si $X(\omega) > 0$ (il existe un n_0 tel que $X(\omega) > 1/n$ $\forall n \geq n_0$). Donc $\mathbb{P}(\lim_{n\to\infty} Y_n = 0) = \mathbb{P}(X > 0) = 1$, et Y_n converge vers 0 p.s.
2. Par la question 1. Y_n converge vers 0 p.s., donc aussi en probabilité, et aussi en loi.
3. Calculons $\mathbb{E}[|Y_n|] = n\mathbb{P}(X \leq 1/n) = 1$. Donc $\mathbb{E}[|Y_n|]$ ne converge pas vers 0 quand $n \to \infty$, et Y_n ne converge pas vers 0 dans L^1.

Exercice 8.3. Soient $(X_n)_{n\geq 1}$ une suite de variables aléatoires réelles indépendantes et X une variable aléatoire réelle.

1. Montrer que, si pour tout $\varepsilon > 0$, $\sum_{n\geq 1} \mathbb{P}(|X_n - X| > \varepsilon) < \infty$, alors $X_n \overset{n\to\infty}{\to} X$ p.s..
2. On suppose que $X_n \to 0$ p.s. (resp. $X_n \to X$ p.s.). Montrer que, pour tout $\varepsilon > 0$, $\sum_{n\geq 1} \mathbb{P}(|X_n| > \varepsilon) < \infty$ (resp. $\sum_{n\geq 1} \mathbb{P}(|X_n - X| > \varepsilon) < \infty$).
3. Conclure.

Solution.

1. Le lemme de Borel–Cantelli assure que, pour tout $\forall\, \varepsilon > 0$, $\mathbb{P}(\limsup\{|X_n - X| > \varepsilon\}) = 0$. Par suite $X_n \to X$ p.s.
2. Si les variables aléatoires X_n, $n \geq 1$, sont indépendantes et que $\sum_n \mathbb{P}(|X_n| > \varepsilon) = \infty$, le lemme de Borel–Cantelli assure que $\mathbb{P}(\limsup\{|X_n| > \varepsilon\}) = 1$. L'hypothèse $X_n \to 0$ p.s. implique $\mathbb{P}(\limsup\{|X_n| > \varepsilon\}) = 0$. Alors nécessairement $\sum_n \mathbb{P}(|X_n| > \varepsilon) < \infty$.
   Remplaçons l'hypothèse $X_n \to 0$ p.s. par l'hypothèse $X_n \to X$ p.s. où X est une variable aléatoire réelle, les X_n étant toujours supposées indépendantes. D'après la loi

0-1 $\limsup X_n$ est une variable aléatoire p.s. constante. Comme $\limsup X_n = X$ p.s. on en déduit que X est p.s. constante. Les variables aléatoires $X_n - X$, $n \geq 1$, sont donc à leur tour indépendantes. De ce qui précède découle que $\sum_n \mathbb{P}(|X_n - X| > \varepsilon) < \infty$.

3. On conclut que, pour une suite (X_n) de variables aléatoires réelles indépendantes,

$$X_n \to X \text{ p.s. si et seulement si, } \forall \varepsilon > 0, \ \sum_n \mathbb{P}(|X_n - X| > \varepsilon) < \infty$$

⋆ **Exercice 8.4.** On considère deux suites de v.a. réelles $(X_n)_{n\geq 1}$ et $(Y_n)_{n\geq 1}$.

1. On suppose que (X_n) converge en loi vers une v.a. X et que (Y_n) converge en probabilité vers 0. Montrer que la suite $(X_n + Y_n)$ converge en loi vers X.

   Indication : travailler avec les fonctions caractéristiques, et majorer $|\phi_{X_n+Y_n}(t) - \phi_{X_n}(t)|$.
2. Donner un exemple dans lequel (X_n) converge en loi vers une v.a. X, (Y_n) converge en loi vers une v.a. Y, mais $(X_n + Y_n)$ ne converge pas en loi.

Solution.

1. On montre la convergence de la fonction caractéristique de $X_n + Y_n$ vers la fonction caractéristique de X :

$$|\phi_{X_n+Y_n}(t) - \phi_X(t)| \leq \phi_{X_n+Y_n}(t) - \phi_{X_n}(t)| + \phi_{X_n}(t) - \phi_X(t)|.$$

   On sait déjà que le deuxième terme converge vers 0, car X_n converge en loi vers X. On se concentre sur le premier terme. Soit $\varepsilon > 0$ fixé On a

$$\begin{aligned}
|\phi_{X_n+Y_n}(t) - \phi_{X_n}(t)| &= |\mathbb{E}[e^{itX_n}(e^{itY_n} - 1)]| \\
&\leq |\mathbb{E}[e^{itX_n}(e^{itY_n} - 1)\mathbf{1}_{Y_n \in [-\varepsilon,+\varepsilon]}]| + |\mathbb{E}[e^{itX_n}e^{itY_n}\mathbf{1}_{|Y_n|>\varepsilon}]| \\
&\leq \mathbb{E}[|e^{itY_n} - 1|\mathbf{1}_{Y_n \in [-\varepsilon,+\varepsilon]}] + \mathbb{P}(|Y_n| > \varepsilon).
\end{aligned}$$

   Le dernier terme tend vers 0 quand n tend vers $+\infty$, car Y_n converge en probabilité vers 0. Le premier terme peut être rendu arbitrairement petit (à t fixé) en choisissant ε petit, car e^{itx} est continu en 0. Au final, on a montré que $|\phi_{X_n+Y_n}(t) - \phi_{X_n}(t)| \to 0$ quand $n \to \infty$.
2. Prenons par exemple $X_n = X$ de loi $\mathcal{N}(0,1)$, et $Y_n = (-1)^n X$ (qui suit aussi la loi $\mathcal{N}(0,1)$, pour tout n). Alors X_n et Y_n convergent bien évidemment en loi vers $\mathcal{N}(0,1)$, mais $X_n + Y_n$ ne converge pas : pour les n impairs $X_n + Y_n = 0$, et pour les n pairs $X_n + Y_n = 2X$, et suit la loi $\mathcal{N}(0,4)$.

⋆ **Exercice 8.5.** Soit $(X_n)_{n\geq 1}$ une suite de variables aléatoires réelles définies sur un espace $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$, et f une application continue de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. Montrer que si X_n converge en loi vers X, alors $f(X_n)$ converge en loi vers $f(X)$.

Solution. Tout d'abord, $f(X_n)$ est bien une variable aléatoire, comme fonction mesurable (car continue) d'une variable aléatoire.

Soit g une fonction continue bornée quelconque, et montrons que $\mathbb{E}[g(f(X_n))] \to \mathbb{E}[g(f(X))]$, ce qui montrera la convergence en loi de $f(X_n)$ vers $f(X)$. Mais comme $g \circ f$ est une fonction continue bornée, ceci découle immédiatement de la convergence en loi de X_n vers X, qui donne $\mathbb{E}[g \circ f(X_n)] \to \mathbb{E}[g \circ f(X)]$.

Exercice 8.6. On définit la suite $(T_n)_{n\geq 1}$ par

$$T_n = \frac{1}{n} \quad \text{si} \quad X_n \leq \frac{1}{n}, \qquad \text{et} \qquad T_n = 1 \quad \text{si} \quad X_n > \frac{1}{n},$$

où $(X_n)_n$ est une suite de v.a indépendantes de loi uniforme sur $[0,1]$.

1. Montrer que la suite (T_n) converge en probabilité et trouver sa limite.
2. Vérifier que la série de probabilités $\sum_{n=1}^{\infty} P(|T_{n^2} - 1| > \varepsilon)$, est convergente pour tout $\varepsilon > 0$. En déduire la convergence presque sûre de la suite (T_{n^2}).

Solution.

1. Pour tout $\varepsilon > 0$, on a $\{|T_n - 1| > \varepsilon\} = \{1 - 1/n > \varepsilon, X_n \leq 1/n\} \subseteq \{X_n \leq 1/n\}$, d'où $P(|T_n - 1| > \varepsilon) \leq \int_0^{1/n} du \to 0$, lorsque n tend vers $+\infty$. La suite (T_n) converge donc en probabilité vers 1.

2. D'après la question 1), on a $P(|T_{n^2} - 1| > \varepsilon) \leq 1/n^2$. La série de terme général $P(|T_{n^2} - 1| > \varepsilon)$ est donc convergente. D'après le lemme de Borel-Cantelli, presque sûrement, l'événement $|T_{n^2} - 1| > \varepsilon$ a lieu un nombre fini de fois. Autrement dit, presque sûrement, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe un rang n_0 tel que pour tout $n \geq n_0$, $|T_{n^2} - 1| \leq \varepsilon$. La suite (T_{n^2}) converge donc presque sûrement vers 1.

Exercice 8.7. Soit $(Y_n)_{n\geq 1}$ une suite de variables aléatoires. On suppose que $\mathbb{E}[Y_n] \to 1$ et que $\mathbb{E}[(Y_n)^2] \to 1$. Montrer que Y_n converge en loi vers 1.

Solution. Par l'inégalité de Bienaymé-Tchebichev, on a

$$\mathbb{P}\big(|Y_n - \mathbb{E}[Y_n]| > \varepsilon\big) \leq \frac{\mathbb{E}[Y_n^2] - \mathbb{E}[Y_n]^2}{\varepsilon^2} \overset{n\to\infty}{\to} 0.$$

Cela prouve que $Y_n - \mathbb{E}[Y_n]$ converge en probabilité vers 0, donc que $Y_n \to 1$ en probabilité, et donc aussi en loi.

Exemples de convergence

Exercice 8.8. Soit $(X_n)_{n\geq 1}$ une suite de v.a. indépendantes, et de même loi de Bernoulli de paramètre p, $(0 < p < 1)$. On pose, pour tout $n \geq 1$, $Y_n = X_n X_{n+1}$, et $V_n = Y_1 + \cdots + Y_n$. Montrer que V_n/n converge en probabilité vers p^2.

Solution.

$V_n = X_1X_2 + \cdots + X_nX_{n+1}$, où X_n sont comme dans l'exercice précedent. Calculons la variance de V_n :

$$Var(X_n) = 2\sum_{i<j} Cov(Y_i, Y_j) + \sum_{i=1}^{n} Var(Y_i).$$

On a $Var(Y_i) = \mathbb{E}[X_i^2 X_{i+1}^2] - \mathbb{E}[X_iX_{i+1}]^2 = p^2 - p^4$. D'autre part $Cov(Y_i, Y_j) = 0$ si $j - i > 1$, car dans ce cas Y_i et Y_j sont indépendantes. Si $j = i + 1$, on a $Cov(Y_i, Y_{i+1}) = \mathbb{E}[X_iX_{i+1}^2X_{i+2}] - \mathbb{E}[X_iX_{i+1}]\mathbb{E}[X_{i+1}X_{i+2}] = p^3 - p^4$. Finalement

$$Var(V_n) = np^2(1-p^2) + 2(n-1)p^3(1-p) = p^2(1-p)(n + 3np - 2p).$$

Alors $\mathrm{Var}(V_n/n) \leq p^2(1-p)(n+3np)/n^2$. On veut montrer que pour tout $\varepsilon > 0$, $\lim_{n\to\infty} P(|(V_n/n) - p^2| > \varepsilon) = 0$. On utilise l'inegalité de Bienaymé-Tchebitcheff(en remarquant que $\mathbb{E}[V_n/n] = p^2$) pour obtenir

$$P(|(V_n/n) - p^2| > \varepsilon) \leq \frac{\mathrm{Var}\Big(V_n/n\Big)}{\varepsilon^2} \leq \frac{1}{n}p^2(1-p)(1+3p) \to 0$$

quand $n \to \infty$.

Remarque : On peut aussi le déduire de la loi des grands nombres. (convergence presque sûre implique la convergence en proba).

Exercice 8.9. Soit $(X_n)_{n\geq 1}$ une suite de v.a. à valeurs entières telle que pour tout n, X_n suit la loi :

$$P(X_n = k) = \frac{\alpha}{n}\left(1 - \frac{\alpha}{n}\right)^{k-1} \quad , \quad k \geq 1\,,$$

$(\alpha \in \mathbb{R}_+^*$, $n \in \mathbb{N}^*$, $n > \alpha)$. Montrer que $(\frac{1}{n}X_n)_{n\geq 1}$ converge en loi. Préciser sa limite.

Solution. On a $\mathbb{P}(\frac{X_n}{n} \leq t) = \mathbb{P}(X_n \leq [tn])$, et

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(X_n \leq [tn]) &= \sum_{k=0}^{[tn]} \frac{\alpha}{n}\Big(1 - \frac{\alpha}{n}\Big)^{k-1} = 1 - \Big(1 - \frac{\alpha}{n}\Big)^{[tn]} \\ &\to 1 - e^{-\alpha t}\end{aligned}$$

quand $n \to \infty$, car $\frac{[tn]}{n} \to t$. Donc, $\frac{X_n}{n}$ converge en loi vers une variable exponentielle de paramètre α.

Exercice 8.10. Considérons une suite $(X_n)_{n\geq 1}$ de v.a. telle que X_n suive une loi exponentielle de paramètre λ_n. On suppose que $\lim_{n\to\infty} \lambda_n = 0$. Soit $Z_n = X_n - [X_n]$, où $[x]$ désigne la partie entière du réel x. Montrer que Z_n converge en loi. Préciser sa limite.

Solution. On a $\{[X_n] = k\} = \{X_n \in [k, k+1)\}$, et $Z_n \in [0, 1]$ p.s. Donc $\mathbb{P}(Z_n \leq x) = 0$ pour

$x \leq 0$, et $\mathbb{P}(Z_n \leq x) = 1$ pour $x > 1$. Soit $x \in [0,1]$, alors

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(Z_n \leq x) &= \sum_{k\geq 0} \mathbb{P}(Z_n \leq x, [X_n] = k) = \sum_{k\geq 0} \mathbb{P}(Z_n \leq x, X_n \in [k, k+1)) \\
&= \sum_{k\geq 0} \mathbb{P}(X_n \in [k, k+x]) = \sum_{k\geq 0} \lambda_n \int_k^{k+x} e^{-\lambda_n t} dt \\
&= \sum_{k\geq 0} \left(e^{-\lambda_n k} - e^{-\lambda_n (k+x)}\right) = \left(1 - e^{-\lambda_n x}\right) \sum_{k\geq 0} e^{-\lambda_n k} \\
&= \frac{1 - e^{-\lambda_n x}}{1 - e^{-\lambda_n}} = \frac{\lambda_n x + O(\lambda_n^2)}{\lambda_n + O(\lambda_n^2)}.
\end{aligned}$$

On obtient donc,

$$\lim_{n\to\infty} F_{Z_n}(x) = \lim_{n\to\infty} P(Z_n \leq x) = x$$

Donc Z_n converge en loi vers une variable uniforme dans $[0,1]$.

Exercice 8.11. Soit $(X_n)_{n\geq 1}$ une suite de v.a. indépendantes de même loi uniforme sur $[0,1]$. Posons $S_n = \sum_{k=1}^n \mathbf{1}_{[0,\alpha]}(X_k)$ et $Z_n = S_n - n\alpha$, $n \geq 1$, pour $\alpha \in [0,1]$.

1. Montrer en utilisant l'identité de Markov que pour tout $\varepsilon > 0$, $P(|Z_n| > n\varepsilon) \leq \frac{\text{Cste}}{n^2}$.
2. Montrer que pour tout $\alpha \in [0,1]$, $\frac{1}{n}\sum_{k=1}^n \mathbf{1}_{[0,\alpha]}(X_k) \overset{n\to+\infty}{\to} \alpha$, p.s.

Solution.

1. On définit $Y_k = \mathbf{1}_{[0,\alpha]}(X_k) - \alpha$. On a $\mathbb{E}[Y_k] = 0$. Soit $Z_n = \sum_{k=1}^n Y_k = S_n - n\alpha$. On note $E(Y_k^2) = a$ et $E(Y_k^4) = b$ (pour certains a et b qui ne dépendent pas de k). On calcule le quatrième moment de Z_n :

$$E(Z_n^4) = \sum_{k=1}^n E(Y_k^4) + 3\sum_{k\neq j} E(Y_k^2)E(Y_j^2) = nb + n(n-1)\frac{a^2}{2}$$

(les autres termes sont du type $E(Y_j^3)\, EY_k \;=\; EY_j\, EY_k\, EY_i\, EY_\ell = 0$ parce que $EY_k = 0$ pour tout k). Alors, par l'inegalité de Markov on a

$$P(|Z_n|/n > \varepsilon) = P(|Z_n|^4/n^4 \;>\; \varepsilon^4) \leq \frac{EZ_n^4}{n^4\varepsilon^4} \sim \frac{c}{n^2}.$$

2. La série de terme général $\frac{1}{n^2}$ est convergente. Le lemme de Borel-Cantelli assure alors que $\{|Z_n|/n > \varepsilon\}$ n'a lieu qu'un nombre fini de fois avec probabilité un, et donc que Z_n converge presque sûrement vers 0.

   Remarque : On aurait pu appliquer directement la loi des grands nombres, les v.a. Y_k étant indépendantes, et identiquement distribuées de loi de Bernoulli de paramètre α.

Exercice 8.12. Soit $(X_n)_{n\geq 1}$ une suite de v.a. positives, montrer que $S_n = X_1 + \cdots + X_n$ converge en probabilité si et seulement si S_n converge p.s..

Remarque : en cours, on a montré que c'était le cas pour des variables aléatoires indépendantes.

Solution. On sait dejá que la convergence p.s. entraîne la convergence en probabilité.

Réciproquement, supposons que S_n converge en probabilité vers une variable S. Comme les variables X_n sont positives, les variables définies par $R_n = S - S_n = X_n + X_{n+1} + \ldots$ convergent en probabilité vers zéro. Or (R_n) est une suite décroissante minorée par zéro donc elle converge presque surement. Sa limite en probabilité étant zéro, sa limite presque sure est aussi zéro.

Exercice 8.13. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on note f_n la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$\begin{aligned} f_n(x) &= 1 - \cos 2n\pi x\,, \quad \text{si} \quad x \in]0,1[\\ f_n(x) &= 0\,, \quad \text{sinon.} \end{aligned}$$

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on définit X_n, une v.a. de densité f_n. Montrer que la suite (X_n) converge en loi bien que la suite de fonctions (f_n) ne converge pas.

Solution. Il est clair que f_n ne converge pas dans $[0,1]$. Pour $x \in [0,1]$, la fonction de répartition de X_n est donnée par

$$F_n(x) = \int_0^x (1 - \cos(2n\pi y))dy = x - \frac{\sin(2n\pi x)}{2n\pi},$$

qui converge vers x quand n tends vers ∞. Donc X_n converge en loi vers X, une variable avec loi uniforme dans $[0,1]$.

Exercice 8.14. *Pas de Césaro pour la convergence en probabilité* Soit $(X_n)_{n\geq 1}$ une suite de variables aléatoires indépendantes, X_n étant de fonction de répartition donnée par

$$F_n(x) = 0 \ \text{ si } x \leq 0 \qquad \text{et} \qquad F_n(x) = 1 - \frac{1}{x+n} \text{ si } x > 0.$$

Montrer que la suite $(X_n)_{n\geq 1}$ converge en probabilitév ers 0, mais pas la suite $Y_n = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^n X_i$.

Solution. Les v.a. X_n étant p.s. positives, on a, pour tout $\varepsilon > 0$, $\mathbb{P}(|X_n| > \varepsilon) = 1 - F_n(\varepsilon) = \frac{1}{\varepsilon+n}$, et donc $\lim_{n\to\infty} \mathbb{P}(|X_n| > \varepsilon) = 0$. Donc la suite $(X_n)_{n\geq 1}$ converge vers 0 en probabilité.

Soit $M_n = \max(X_1, \ldots, X_n)$. Alors $M_n \leq \sum_{i=1}^n X_i$ p.s., et donc pour tout $\varepsilon > 0$, on a $\mathbb{P}(\frac{M_n}{n} > \varepsilon) \leq \mathbb{P}(Y_n > \varepsilon)$. Par indépendance des X_n, on a pour tout $x > 0$,

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(M_n \leq x) &= \mathbb{P}\Big(\bigcap_{1\leq i\leq n} \{X_i \leq x\}\Big) = \prod_{i=1}^n \mathbb{P}(X_i \leq x) \\ &= \prod_{i=1}^n \Big(1 - \frac{1}{x+i}\Big) \leq \Big(1 - \frac{1}{x+n}\Big)^n. \end{aligned}$$

On obtient donc

$$1 - \Big(1 - \frac{1}{n(\varepsilon+1)}\Big)^n \leq \mathbb{P}\Big(\frac{M_n}{n} > \varepsilon\Big) \leq \mathbb{P}(Y_n > \varepsilon),$$

d'où,

$$\lim_{n\to\infty} \mathbb{P}(Y_n > \varepsilon) \geq 1 - \exp\big(-\frac{1}{\varepsilon+1}\big) > 0,$$

et donc Y_n ne converge pas vers 0 en probabilité.

Exercice 8.15. On considère une suite de v.a. indépendantes et de même loi : $(X_n)_{n\geq 0}$. On définit alors la suite $(Y_n)_{n\geq 0}$ par

$$Y_0 = \frac{X_0}{2};\ Y_1 = \frac{X_1 + Y_0}{2};\ Y_2 = \frac{X_2 + Y_1}{2}; \cdots; Y_n = \frac{X_n + Y_{n-1}}{2}; \cdots.$$

1. Calculer la fonction caractéristique ϕ_n de Y_n en fonction de ϕ, la fonction caractéristique de X_1, et de n.
2. On suppose que la loi commune aux variables X_n est la loi normale centrée $\mathcal{N}(0,\sigma)$. Quelle est la loi de Y_n ? Quelle est la loi limite de (Y_n) lorsque n tend vers l'infini ?
3. Si les variables X_n suivent la loi de Cauchy de densité $[\pi(1+x^2)]^{-1}$, $x \in \mathbb{R}$, montrer que (Y_n) converge en loi lorsque n tend vers l'infini. Préciser la limite.

   Indication : la fonction caractéristique de la loi de Cauchy est donnée par $\phi(t) = e^{-|t|}$.

Solution. 1) On écrit

$$Y_n = \sum_{k=0}^{n} X_{n-k} 2^{-k-1}$$

Donc, par l'indépendance des X_n et comme celles ci ont la même loi,

$$\phi_n = \prod_{k=0}^{n} \phi(t2^{-k-1})$$

2) La fonction caractéristique de la loi normale $\mathcal{N}(0, \sigma^2)$ est $\phi(t) = e^{-t^2\sigma^2/2}$. Donc

$$\begin{aligned}\phi_n(t) &= \exp\Big(-\frac{t^2\sigma^2}{2}\sum_{k=0}^{n} 4^{-k-1}\Big) \\ &= \exp\Big(-\frac{t^2\sigma^2(1-4^{-n-1})}{8(1-4^{-1})}\Big) \\ &= \exp\Big(-\frac{t^2\sigma^2}{2}\frac{1}{3}(1-4^{-n-1})\Big)\end{aligned}$$

qui converge vers la loi normale $\mathcal{N}(0, \sigma^2/3)$ quand $n \to \infty$.

3) La fonction caractéristique de la loi de Cauchy standard est $\phi(t) = e^{-|t|}$. Alors,

$$\phi_n(t) = \exp\Big(-|t|/2 \sum_{k=0}^{n} 2^{-k}\Big) = \exp\big(-|t|(1-2^{-n+1}\big),$$

qui converge vers la fonction caractéristique de la loi de Cauchy standard.