Série d'exercices n° 4. Variables aléatoires à valeur dans $\mathbb{N}$

Loi d'une variable aleatoire discrète, espérance, variance

⋆ **Exercice 4.1.** Soit $A \in \mathcal{F}$ un événement. Donner la loi de la variable aléatoire $\mathbb{1}_A$, et son espérance. Soit U une variable aléatoire de loi uniforme sur $[0,1]$ et $p \in]0,1[$. Donner la loi de la variable aléatoire $\mathbb{1}_{\{U<p\}} - \mathbb{1}_{\{U>p\}}$.

Exercice 4.2. Un joueur lance simultanément un dé et 2 pièces de monnaie, et son gain G (en euros) est le montant inscrit sur le dé multiplié par le nombre de 'Pile' obtenus. Donner la loi de G, puis son espérance.

⋆ **Exercice 4.3.** On dispose de 3 dés numérotés de 1 à 6. On parie sur un chiffre et on lance les 3 dés. Si le chiffre choisi sort 0 (resp. 1, 2, 3) fois on gagne 0 (resp. 1, 2, 5) euro. On note X le gain de la partie.

a) Donner la loi de X.

b) Calculer son espérance et sa variance.

Exercice 4.4. On lance deux dés à 6 faces numérotés de 1 à 6. On note X et Y les variables aléatoires correspondant aux résultats des deux dés.

a) Déterminer la loi de la variable aléatoire $Z = X + Y$. Calculer son espérance.

b) Déterminer la loi de la variable aléatoire $W = XY$. Calculer son espérance.

c) Calculer les variances de X, Y, Z et W.

Exercice 4.5. Soient X, Y, Z trois variables aléatoires à valeurs dans $\mathbb{N}$. On suppose que X et Y ont même loi. Soit $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ une fonction. Est-il vrai que $f(X)$ et $f(Y)$ ont même loi ? Est-il vrai que $X + Z$ et $Y + Z$ ont même loi ?

⋆ **Exercice 4.6.** Montrer que si U suit une loi uniforme sur $[0,1]$ alors la partie entière de nU suit une loi uniforme sur $\{0, \dots, n-1\}$.

Exercice 4.7. *(Absence de mémoire pour la loi géométrique)*

a) Soit T une v.a. géométrique de paramètre θ ($\mathbb{P}(T = k) = \theta(1-\theta)^{k-1}$ pour $k \geq 1$). Calculer $\mathbb{P}(T > n)$ pour tout entier naturel, puis montrer que $\mathbb{P}(T > n + p \,|\, T > n) = \mathbb{P}(T > p)$.

b) Soit T une v.a. à valeurs dans $\mathbb{N}^*$. On suppose que pour tous entiers non nuls n et p, on a $\mathbb{P}(T > n) > 0$ et $\mathbb{P}(T > n + p \,|\, T > n) = \mathbb{P}(T > p)$. Montrer que T suit une loi géométrique.

⋆ **Exercice 4.8.** *(Urne de Polya)* Une urne contient initialement une boule blanche et une boule noire. À chaque tour, une boule est prélevée de l'urne, et est remplacée par deux boules de la même couleur (que celle que l'on vient de prélever). On souligne qu'après n tours, il y a $n + 2$ boules dans l'urne. On note B_n le nombre de boules blanches dans l'urne après n tours, et on cherche à déterminer la loi de B_n pour tout $n \geq 1$.

a) Donner la loi de B_1 et de B_2.

b) Donner, pour $n \geq 1$, les probabilités $\mathbb{P}(B_n = k \mid B_{n-1} = k)$ et $\mathbb{P}(B_n = k + 1 \mid B_{n-1} = k)$, pour $k \in \{1, \dots, n\}$.

c) En déduire par récurrence sur n que $\mathbb{P}(B_n = k) = \frac{1}{n+1}$ pour tout $k \in \{1, \dots, n + 1\}$.

⋆ **Exercice 4.9.** $2n$ personnes, n hommes et n femmes, sont réparties de manière aléatoire dans deux groupes de n personnes chacun.

a) Combien y a-t-il de manière de répartir $2n$ personnes en deux groupes de n personnes ?
   On appelle X le nombre de femmes dans le premier groupe.

b) Donner la loi de X.

c) Calculer $\mathbb{E}[X]$. *On pourra écrire* $X = \sum_{i=1}^{N} \mathbb{1}_{A_i}$ *où* A_i *est l'événement ≪ la* $i^{\text{ème}}$ *femme est dans le premier groupe ≫.*

Exercice 4.10. Montrer que, si X est une variable aléatoire à valeurs dans $\mathbb{N}$, alors $\mathbb{E}[X] = \sum_{k\geq 0} \mathbb{P}(X > k)$.

☺ **Exercice 4.11.** *(Motus)* On possède une urne, avec i boules jaunes, et j boules noires. On prend sans remise une boule au hasard dans l'urne, jusqu'à ce que l'on tire une boule noire. On appelle T le temps que dure ce jeu (c'est-à-dire le nombre de boules tirées jusqu'à la première boule noire comprise).

a) Montrer que, pour tout $k \in \{0, 1, \dots, i\}$, on a

$$\mathbb{P}(T > k) = \binom{i+j-k}{j} \Big/ \binom{i+j}{j}.$$

b) Montrer que $\binom{i+j+1}{j+1} = \sum_{k=0}^{i} \binom{i+j-k}{j}$.

c) En utilisant que $\mathbb{E}[T] = \sum_{k=0}^{i} \mathbb{P}(T > k)$ (cf. Exercice 4.10), calculer $\mathbb{E}[T]$.

Indépendance de Variables discrètes

⋆ **Exercice 4.12.** Soit X et Y deux v.a. indépendantes, de loi de Poisson de paramètres respectifs λ_1 et λ_2. Calculer la loi de $X + Y$.

Exercice 4.13. Soit n un entier, et soient X et Y deux variables aléatoires indépendantes de loi uniforme sur $\{1, \dots, n\}$: pour $k \in \{1, \cdots, n\}$, on a $\mathbb{P}(X = k) = \frac{1}{n}$ et $\mathbb{P}(Y = k) = \frac{1}{n}$.

a) Calculer $\mathbb{P}(X = Y)$ et $\mathbb{P}(X \geq Y)$.

b) Déterminer la loi de $X - Y$.

⋆ **Exercice 4.14.** *(Indépendance et indépendance deux à deux).* On suppose données, sur un espace de probabilité $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ deux variables de Bernoulli ε_1 et ε_2, indépendantes, à valeurs dans $\{-1, +1\}$ avec

$$\mathbb{P}(\varepsilon_i = +1) = \mathbb{P}(\varepsilon_i = -1) = \frac{1}{2}, \ (i = 1,\ 2).$$

a) Montrer que la v.a. $\varepsilon_1\varepsilon_2$ est indépendante d'une part de ε_1, et d'autre part de ε_2.

b) La v.a. $\varepsilon_1\varepsilon_2$ est-elle indépendante du couple $(\varepsilon_1, \varepsilon_2)$?

☺ **Exercice 4.15.** Un insecte pond un nombre N (aléatoire) d'œufs, et on suppose que chaque œuf donne naissance à un nouvel insecte avec probabilité p, indépendamment de l'éclosion des autres œufs. On suppose que N suit une loi de Poisson de paramètre $\lambda > 0$, et on considère $(X_i)_{i\geq 1}$ une suite de variables aléatoires de loi de Bernoulli de paramètre $p \in]0, 1[$ (qui encode le fait que lei^{e} œuf éclose ou non). On suppose que les variables aléatoires $(N, X_1, X_2, \dots)$ sont indépendantes et on note D le nombre de descendants de l'insecte.

a) Écrire D en fonction des variables aléatoires N et X_i.

b) Pour tout n, d, calculer $\mathbb{P}(D = d \mid N = n)$. En déduire la loi de D.

☹ **Exercice 4.16.** On considère une suite de variables aléatoires $(X_n)_{n\geq 1}$, définies sur un même espace de probabilité $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$. On suppose que les variables aéatoires sont indépendantes, et que X_n suit la loi uniforme sur $\{0, 1, \dots, n\}$.

a) On définit l'évévement $A_n = \{X_n = 0\}$. Calculer $\mathbb{P}(A_n)$.

b) Montrer que pour tout $k \geq 1$, $\mathbb{P}\big(\bigcup_{n\geq k} A_n\big) = 1$.

c) Décrire l'événement $A = \bigcap_{k\geq 1} \bigcup_{n\geq k} A_n$ en des mots simples (sans utiliser "il existe" ou "pour tout"). Montrer que $\mathbb{P}(A) = 1$.

d) On note B_n l'événement $\{X_n = n\}$, et $B = \bigcap_{k\geq 1} \bigcup_{n\geq k} B_n$. Décrire l'événement B avec des mots simples, et montrer que $\mathbb{P}(B) = 1$.

☹ **Exercice 4.17.** *(La ruine du joueur)* Un joueur va au casino avec une fortune $a \in \mathbb{N}$. A chaque partie, il peut gagner 1 euro avec une probabilité p et perdre 1 euro avec une probabilité $q = 1 - p$. Le but du joueur est alors de jouer jusqu'à l'obtention de la fortune $N \geq a$, $N \in \mathbb{N}$ mais il doit s'arrêter s'il est ruiné. On note $p_N(a)$ sa probabilité de succès (atteindre N avant la ruine).

a) Calculer $p_N(0)$ et $p_N(N)$.

b) Soit $a > 0$. En raisonnant sur ce qui s'est passé à la première partie, montrer la relation

$$p_N(a) = p \times p_N(a+1) + q \times p_N(a-1)\,.$$

c) Déduire la valeur de $p_N(a)$ suivant que $p = 1/2$ ou $p \neq 1/2$.

Fonctions génératrices

Exercice 4.18. Soit X et Y deux variables aléatoires à valeurs dans $\mathbb{N}$ et admettant la même fonction génératrice. Montrer que X et Y ont même loi.

Exercice 4.19. Soit X et Y deux variables aléatoires à valeurs dans $\mathbb{N}$ et indépendantes. Montrer que la fonction génératrice de la variable $X+Y$ est le produit des fonctions génératrices de X et Y.

Exercice 4.20. Calculer à l'aide de la fonction génératrice l'espérance et la variance de la loi géométrique de paramètre p et de la loi de Poisson de paramètre λ.

⋆ **Exercice 4.21.** Soient X et Y deux variables aléatoires indépendantes, suivant une loi de Poisson, de paramètres respectifs λ_1 et λ_2. Calculer la fonction génératrice de X puis celle de $X + Y$. Qu'en déduisez-vous ?

⋆ **Exercice 4.22.** Soit n fixé, et $(X_i)_{i=1,\dots,n}$ une suite de v.a. de Bernoulli indépendantes de paramètre $p_n = \lambda/n$; $X_i = 1$ modélise le fait que le $i^{\text{ème}}$ assuré subit un sinistre. Le nombre d'assurés subissant un sinistre est donc $Y_n = X_1 + \ldots + X_n$. On suppose que les X_i sont indépendants ; le fait que p_n soit petit modélise le fait que le risque de sinistre pour chaque assuré est petit devant le nombre d'assurés, λ représentant la "moyenne du nombre d'assurés sinistrés".

a) Calculer la fonction génératrice de Y_n.

b) Calculer la limite, quand n tend vers $+\infty$, de la fonction génératrice de Y_n. *(On rappelle que* $\ln(1+u) = u + o(u)$.*)* Conclusion ?

Exercice 4.23. Reprendre l'exercice 4.15, et calculer la fonction génératrice de D afin de retrouver la loi de D.