Série d'exercices n° 2. Probabilités et variables aléatoires discrètes

Une étoile désigne un exercice important.

⋆ **Exercice 2.1.** Soit Ω un ensemble. Soit $(X_n)_{n\geq 1}$ une suite de fonctions à valeurs entières définies sur Ω.

1. Décrire en français et sans utiliser les expressions "quelque soit" ni "il existe" les parties suivantes de Ω

$$A = \bigcup_{a\in\mathbb{N}} \bigcup_{b\in\mathbb{N}} \bigcap_{n\geq 1} \{\omega \in \Omega\,,\, a \leq X_n(\omega) \leq b\};$$

$$B = \bigcup_{N\geq 1} \bigcap_{n\geq N} \bigcap_{m\geq n} \{\omega \in \Omega\,,\, X_n(\omega) - X_m(\omega) \geq 0\};$$

$$C = \bigcup_{k\in\mathbb{N}} \bigcap_{N\geq 1} \bigcup_{n\geq N} \bigcup_{m\geq N} \left\{\omega \in \Omega\,,\, |X_n(\omega) - X_m(\omega)| > \frac{1}{k}\right\}.$$

2. Faire l'opération de traduction inverse pour les parties suivantes de Ω

	l'ensemble des $\omega \in \Omega$ tels que la suite $(X_n(\omega))_{n\geq 1}$...
D	... ne soit pas bornée supérieurement ,
E	... tende vers $+\infty$.

Solution.

1. A est l'ensemble des ω tels que la suite $(X_n(\omega))_{n\geq 1}$ soit bornée ;
   B ... soit décroissante à partir d'un certain rang ;
   C ... ne soit pas de Cauchy (comme on est dans $\mathbb{R}$, cela équivaut à ne pas converger).
2.

$$D = \bigcap_{M\geq 0} \bigcup_{n\geq 1} \{\omega \in \Omega; X_n(\omega) \geq M\};$$

$$E = \bigcap_{M\geq 0} \bigcup_{n\geq 1} \bigcap_{m\geq m} \{\omega \in \Omega; X_m(\omega) \geq M\}.$$

Exercice 2.2.

On possède une infinités de boules numérotées, et une urne vide. Voilà l'expérience que l'on réalise : 1 minute avant minuit, on place les boules $\text{n}^{\text{os}}\,1$ et 2 dans l'urne, et on tire dans la foulée une boule dans l'urne, au hasard (uniformément parmi les boules présentes dans l'urne). $\frac{1}{2}$ minute avant minuit, on place les boules $\text{n}^{\text{os}}\,3$ et 4 dans l'urne, et on tire dans la foulée une boule dans l'urne, au hasard (uniformément parmi les boules présentes dans l'urne). $\cdots$ $\frac{1}{n}$ minute avant minuit, on place les boules $\text{n}^{\text{os}}\,2n-1$ et $2n$ dans l'urne, et on tire dans la foulée une boule dans l'urne, au hasard (uniformément parmi les boules présentes dans l'urne).

1. Combien y a-t-il de boules dans l'urne entre $\frac{1}{n}$ et $\frac{1}{n+1}$ minute avant minuit. Combien y aura-t-il de boules dans l'urne à minuit ?
2. On note A_n l'événement : « la boule $\text{n}^{\text{o}}\,1$ est toujours dans l'urne entre $\frac{1}{n}$ et $\frac{1}{n+1}$ minute avant minuit ». Calculer la probabilité $\mathbb{P}(A_n)$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, et montrer que $\lim_{n\to\infty} \mathbb{P}(A_n) = 0$

3. On note $A = \bigcap_{n\geq 1} A_n$. Comment interprétez vous l'événement A (le décrire avec des mots). Que vaut $\mathbb{P}(A)$?
4. Maintenant, pour tout $i \geq 1$ fixé, on note $A_n^{(i)}$ l'événement : ≪ la boule n° i est dans l'urne entre $\frac{1}{n}$ et $\frac{1}{n+1}$ minute avant minuit ≫. Calculer $\mathbb{P}(A_n^{(i)})$ pour tout $n \geq 1$. En déduire que $\lim_{n\to\infty} \mathbb{P}(A_n^{(i)}) = 0$.
5. On note $A^{(i)} = \bigcap_{n\geq 1} A_n^{(i)}$. Que vaut $\mathbb{P}(A^{(i)})$?
6. Montrer que $\mathbb{P}\left(\bigcup_{i\geq 1} A^{(i)}\right) = 0$. Interprétez le résultat.

Solution.

1. À chaque étape, on ajoute deux boules et on en enlève une, donc le nombre de boules augmente de 1 à chaque étape. Il y a donc n boules juste après $\frac{1}{n}$ minute avant minuit. On voit donc qu'il y aura une infinité de boules à minuit.
2. Pour que la boule n° 1 n'ait toujours pas été tirée après n étapes, il faut qu'elle n'ait pas été tirée à la première étape (probabilité $1 - \frac{1}{2}$ car il y a deux boules dans l'urne), ni à la deuxième, troisième, etc. n^e étape. La probabilité de n'être pas choisie à la k^e étape est $1 - \frac{1}{k+1}$ car il y a $k+1$ boules dans l'urne à ce moment là. On a donc

$$\mathbb{P}(A_n) = \prod_{k=1}^{n} \left(1 - \frac{1}{k+1}\right) = \prod_{k=1}^{n} \frac{k}{k+1} = \frac{1}{n+1}\,.$$

   On a donc clairement que $\mathbb{P}(A_n) \to 0$ quand $n \to \infty$.
3. On interprète A comme l'événement ≪ la boule n° 1 est dans l'urne à tout moment ≫, ou encore ≪ la boule n° 1 est dans l urne à minuit ≫.

   Comme les événement A_n sont décroissants, on a $\mathbb{P}(A) = \lim_{n\to\infty} \mathbb{P}(A_n) = 0$.
4. On raisonne de la même manière que dans la question 2, sauf que maintenant, la boule n° i n'est pas dans l'urne avant la $\lfloor \frac{i+1}{2} \rfloor^e$ étape ($\lfloor \cdot \rfloor$ désigne la partie entière). Donc on a $\mathbb{P}(A_n^{(i)}) = 0$ si $n < \lfloor \frac{i+1}{2} \rfloor$, et pour $n \geq \lfloor \frac{i+1}{2} \rfloor$ on a

$$\mathbb{P}(A_n^{(i)}) = \prod_{k=\lfloor \frac{i+1}{2} \rfloor}^{n} \left(1 - \frac{1}{k+1}\right) = \prod_{k=\lfloor \frac{i+1}{2} \rfloor}^{n} \frac{k}{k+1} = \frac{\lfloor \frac{i+1}{2} \rfloor}{n+1}\,.$$

   De la même manière que précédemment, on a pour tout i (fixé) $\lim_{n\to\infty} \mathbb{P}(A_n^{(i)}) = 0$.
5. De la même manière que dans la question 3., on a $\mathbb{P}(A^{(i)}) = 0$, $A^{(i)}$ étant l'événement ≪ la boule n° i est dans l'urne à minuit ≫.
6. On a $\mathbb{P}\left(\bigcup_{i\geq 1} A^{(i)}\right) \leq \sum_{i\geq 1} \mathbb{P}(A^{(i)}) = 0$. On interprète l'événement $\bigcup_{i\geq 1} A^{(i)}$ comme ≪ il existe un i tel que la boule i soit dans l'urne à minuit ≫, ou autrement dit ≪ il y a une boule dans l'urne à minuit ≫. On a donc montré que la probabilité qu'il reste une boule dans l'urne à minuit vaut 0.

Exercice 2.3. Un joueur lance simultanément un dé et 2 pièces de monnaie, et son gain G (en euros) est le montant inscrit sur le dé multiplié par le nombre de 'Pile' obtenus. Donner la loi de G.

Solution. G est à valeur dans $\{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 8, 10, 12\}$.

$$\mathbb{P}(G=0) = \mathbb{P}(\text{zéro 'Pile'}) = 1/4$$

$$\mathbb{P}(G=8) = \mathbb{P}(\text{dé} = 4 \cap \text{deux 'Pile'}) = \frac{1}{6} \times \frac{1}{4} = \frac{1}{24} \quad \big(= \mathbb{P}(G=10) = \mathbb{P}(G=12) \big)$$

$$\mathbb{P}(G=1) = \mathbb{P}(\text{dé} = 1 \cap \text{un 'Pile'}) = \frac{1}{6} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{12} \quad \big(= \mathbb{P}(G=3) = \mathbb{P}(G=5) \big)$$

$$\mathbb{P}(G=2) = \mathbb{P}(\text{dé} = 2 \cap \text{un 'Pile'}) + \mathbb{P}(\text{dé} = 1 \cap \text{deux 'Pile'}) = \frac{1}{6} \times \frac{1}{2} + \frac{1}{6} \times \frac{1}{4} = \frac{1}{8}$$
$$\big(= \mathbb{P}(G=4) = \mathbb{P}(G=6) \big)\,.$$

Exercice 2.4. On effectue des lancers successifs et indépendants d'une pièce qui tombe sur pile avec probabilité p et sur face avec probabilité $1-p$.

1. Décrire le modèle probabiliste utilisé pour modéliser cette situation.
2. On appelle T_1 le numéro du premier lancer où l'on obtient pile. Déterminer la loi de T_1.
3. Pour tout $i \geq 1$, on appelle T_i le numéro du lancer où l'on obtient pile pour la $i^{\text{ème}}$ fois. Déterminer la loi de T_i pour tout $i \geq 1$.
4. Calculer la probabilité que pile ne sorte jamais.

Solution.

1. On choisit comme univers $\Omega = \{P, F\}^{\mathbb{N}^*}$. On munit Ω de la probabilité $\mathbb{P}$ correspondant à cette expérience. Soit $(X_i)_{i \geq 1}$ la suite de variables aléatoires telle que, pour tout i, X_i vaut 1 si l'issue du $i^{\text{ème}}$ lancer est pile, et 0 sinon. Étant donné que les lancers sont indépendants, les variables aléatoires $(X_i)_{i \geq 1}$ sont indépendantes. D ?après les conditions de l ?expérience, la loi de X_i est donnée par $\mathbb{P}(X_i = 1) = \mathbb{P}(\{\text{obtenir pile au } i^{\text{ème}} \text{ lancer}\}) = p$ et $\mathbb{P}(X_i = 0) = \mathbb{P}(\{\text{obtenir face au } i^{\text{ème}} \text{ lancer}\}) = 1 - p$. Ainsi $(X_i)_{i \geq 1}$ est une suite de variables aléatoires i.i.d. de loi de Bernoulli de paramètre p.
2. Soit $k \geq 1$, on a $\{T_1 = k\} = \{X_1 = 0, \ldots, X_{k-1} = 0, X_k = 1\}$, et par indépendance, $\mathbb{P}(T_1 = k) = (1-p)^{k-1}p$. Autrement dit, T_1 suit une loi géométrique de paramètre p.
3. On obtient, pour $k \geq i$
$$\mathbb{P}(T_i = k) = \binom{k-1}{i-1} p^i (1-p)^{k-i}$$
(il faut placer les $i-1$ premiers "Pile" dans les $k-1$ premiers lancers) Il s ?agit de la loi binomiale négative de paramètre i et p. Remarquer que
$$\sum_{k=i}^{+\infty} \binom{k-1}{i-1} p^i (1-p)^{k-i} = p^i \sum_{k \geq i} \binom{k-1}{i-1} (1-p)^{k-1-(i-1)} = p^i \frac{1}{(1-(1-p))^{(i-1)+1}} = 1$$
4. Soit A_n l'événement "Pile ne sort pas jusqu'à l'instant n". Alors $A_n = \{X_1 = 0, \ldots, X_n = 0\}$ et par indépendance, $\mathbb{P}(A_n) = (1-p)^n$. De plus, l'événement A "Pile ne sort jamais" s'écrit $A = \bigcap_{n \geq 1} A_n$. Comme la suite d'événement est décroissante, on a d'après le cours que
$$\mathbb{P}(A) = \lim_{n \to \infty} \mathbb{P}(A_n) = 0\,.$$

⋆ **Exercice 2.5.** Montrer que, si X est une variable aléatoire à valeurs dans $\mathbb{N}$, alors
$$\mathbb{E}[X] = \sum_{k \geq 0} \mathbb{P}(X > k)\,.$$

Solution. On écrit

$$\sum_{k\geq 0}\mathbb{P}(X>k)=\sum_{k\geq 0}\sum_{i\geq k+1}\mathbb{P}(X=i)=\sum_{i\geq 1}\sum_{k=0}^{i-1}\mathbb{P}(X=i)=\sum_{i\geq 1}i\mathbb{P}(X=i)=\mathbb{E}[X].$$

Exercice 2.6. On possède une urne, avec i boules jaunes, et j boules noires. On prend sans remise une boule au hasard dans l'urne, jusqu'à ce que l'on tire une boule noire. On appelle T le temps que dure ce jeu (c'est-à-dire le nombre de boules tirées jusqu'à la première boule noire comprise).

1. Montrer que, pour tout $k\in\{0,1,\dots,i\}$, on a
$$\mathbb{P}(T>k)=\binom{i+j-k}{j}\Big/\binom{i+j}{j}.$$
2. Montrer que $\binom{i+j+1}{j+1}=\sum_{k=0}^{i}\binom{i+j-k}{j}$.
3. En utilisant que $\mathbb{E}[T]=\sum_{k=0}^{i}\mathbb{P}(T>k)$ (cf. Exercice 5), calculer $\mathbb{E}[T]$.

Solution.

1. On peut prendre pour Ω l'ensemble des $(i+j)$-uplets dont les entrées (les composantes) sont la couleur des boules :
$$\Omega=\{(x_1,\dots,x_{i+j}),\quad x_k\in\{\text{Jaune},\text{Noire}\}\}.$$
Ainsi x_k correspond a la couleur de la k-ième boule tirée.
On munit Ω de la tribu des parties $\mathcal{P}(\Omega)$ et de la probabilité uniforme $\mathbb{P}$. Le cardinal de Ω est le nombre de façon de placer les j boules noires dans le $(i+j)$-uplet, c'est à dire $\binom{i+j}{j}$. Ainsi pour toute partie A de Ω :
$$\mathbb{P}(A)=\frac{\text{Card}(A)}{\binom{i+j}{j}}.$$
Par définition du temps T, l'événement $\{T>k\}$ correspond aux issues pour lesquelles les k premières boules tirées sont jaunes
$$\{T>k\}=\{(x_1,\dots,x_{i+j})\in\Omega,\quad x_1=\dots=x_k=\text{Jaune}\}.$$
Ainsi le cardinal de $\{T>k\}$ est le nombre de façon de choisir l'emplacement, dans le $(i+j)$-uplet, des j boules noires parmi les $i+j-k$ dernières composantes restantes. C'est à dire $\text{Card}(\{T>k\})=\binom{i+j-k}{j}$. On a donc bien
$$\mathbb{P}(T>k)=\frac{\binom{i+j-k}{j}}{\binom{i+j}{j}}.$$
2. On peut montrer cette égalité par récurrence sur i (j est fixé ≥ 1). Elle est vraie pour $i=0$ et supposons qu'elle est vraie pour $i-1$ ($i\geq 1$).
Rappelons la formule bien connue du "triangle de Pascal" :
$$\binom{n}{k}=\binom{n-1}{k}+\binom{n-1}{k-1}.$$
On a donc
$$\binom{i+j+1}{j+1}=\binom{i+j}{j}+\binom{i+j}{j+1}. \tag{1}$$

Par hypothèse de récurrence on a $\binom{i+j}{j+1} = \sum_{k=0}^{i-1} \binom{i+j-k-1}{j} = \sum_{k=1}^{i} \binom{i+j-k}{j}$. Donc en reprenant (1) on obtient

$$\binom{i+j+1}{j+1} = \binom{i+j}{j} + \sum_{k=1}^{i} \binom{i+j-k}{j} = \sum_{k=0}^{i} \binom{i+j-k}{j}.$$

Ceci est bien la formule demandée au rang i.

3. Puisque, par définition de T, on a $T \leq i+1$ alors $\mathbb{P}(T > k)$ est nul pour $k \geq i+1$ et $\mathbb{E}[T] = \sum_{k=0}^{i} \mathbb{P}(T > k)$ c'est à dire

$$\mathbb{E}[T] = \sum_{k=0}^{i} \binom{i+j-k}{j} \Big/ \binom{i+j}{j} = \binom{i+j+1}{j+1} \Big/ \binom{i+j}{j} = \frac{i+j+1}{j+1}.$$

⋆ **Exercice 2.7.** *(Absence de mémoire pour la loi géométrique)*

1. Soit T une variable aléatoire géométrique de paramètre θ ($\mathbb{P}(T = k) = \theta(1-\theta)^{k-1}$ pour $k \geq 1$). Calculer $\mathbb{P}(T > n)$ pour tout entier naturel, puis montrer que $\mathbb{P}(T > n+p \,|\, T > n) = \mathbb{P}(T > p)$.
2. Soit T une variable aléatoire à valeurs dans $\mathbb{N}^*$. On suppose que pour tous entiers non nuls n et p, on a $\mathbb{P}(T > n) > 0$ et $\mathbb{P}(T > n+p \,|\, T > n) = \mathbb{P}(T > p)$. Montrer que T suit une loi géométrique.

Solution.

1. Un calcul facile donne $\mathbb{P}(T > n) = (1-\theta)^n$. Et

$$\mathbb{P}(T > n+p \,|\, T > n) = \frac{\mathbb{P}(T > n+p)}{\mathbb{P}(T > n)} = \frac{(1-\theta)^{n+p-1}}{(1-\theta)^{n-1}} = (1-\theta)^p = \mathbb{P}(T > p).$$

2. Par définition de la probabilité conditionnelle, on a

$$\mathbb{P}(T > n+p \,|\, T > n) = \frac{\mathbb{P}(T > n+p, T > n)}{\mathbb{P}(T > n)} = \frac{\mathbb{P}(T > n+p)}{\mathbb{P}(T > n)}$$

car $\{T > n+p\} \subset \{T > n\}$. Par hypothèse, $\mathbb{P}(T > n+p \,|\, T > n) = \mathbb{P}(T > p)$, ce qui donne $\mathbb{P}(T > n+p) = \mathbb{P}(T > n)\mathbb{P}(T > p)$. Avec $p = 1$, on obtient que $\mathbb{P}(T > n+1) = \mathbb{P}(T > n)\mathbb{P}(T > 1)$. Posons $a = \mathbb{P}(T > 1)$. On trouve par récurrence que $\mathbb{P}(T > n) = a^n$. On vérifie que $a > 0$ car $\mathbb{P}(T > n) > 0$ par hypothèse. De plus, on remarque que $\{T > n\}$ sont des évènements décroissants en n et $\bigcap_{n>1}\{T > n\} = \{T = \infty\}$. Par convergence monotone, on a $\mathbb{P}(T = \infty) = \lim_{n\to\infty} \mathbb{P}(T > n)$. Comme $\mathbb{P}(T = \infty) = 0$, on a nécessairement $a < 1$. La loi de T est alors donnée par $\mathbb{P}(T = n) = \mathbb{P}(T > n) - \mathbb{P}(T > n+1) = (1-a)a^n$, $n > 0$. T suit une loi géométrique de paramètre a.
La loi géométrique est dite sans mémoire. Supposons que T modélise le temps d'attente à un arrêt de bus . Sachant qu'on a attendu plus de n minutes, la probabilité d'attendre p minutes de plus ne dépend pas de n.

Exercice 2.8. Soient X, Y, Z trois variables aléatoires à valeurs dans $\mathbb{N}$. On suppose que X et Y ont même loi. Soit $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ une fonction. Est-il vrai que $f(X)$ et $f(Y)$ ont même loi ? Est-il vrai que $X + Z$ et $Y + Z$ ont même loi ?

Solution. Soit $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ l'espace probabilisé sur lequel les variables X, Y, Z sont définies. Les variables $f(X)$ et $f(Y)$ ont la même loi si $\mathbb{P}(f(X) = n) = \mathbb{P}(f(Y) = n)$ pour tout n. Or,

$$\{f(X) = n\} = \{\omega; f(X(\omega)) = n\} = \{\omega, X(\omega) \in f^{-1}(\{n\})\} = \{X \in f^{-1}(\{n\})\},$$

et de manière analogue, $\{f(Y) = n\} = \{Y \in f^{-1}(\{n\})\}$. Comme X et Y ont la même loi $\mathbb{P}(X \in f^{-1}(\{n\})) = \mathbb{P}(Y \in f^{-1}(\{n\}))$. On en conclut que $f(X)$ et $f(Y)$ ont la même loi.

En revanche, X et Y peuvent avoir des loi différentes. Par exemple, soit $\Omega = \{0,1\}, \mathcal{F} = \mathcal{P}(\Omega), \mathbb{P}(\{0\}) = \mathbb{P}(\{1\}) = 1/2$ (penser au lancer d'une pièce non biaisée). Et

$$X(\{0\}) = 1; X(\{1\}) = 0; \quad ; Y(\{0\}) = 0; Y(\{1\}) = 1.$$

Alors $\mathbb{P}(X = 0) = \mathbb{P}(X = 1) = 1/2$, et de même pour Y : X et Y ont donc bien la même loi. On définit $Z = X$. Alors $\mathbb{P}(X + Z = 0) = \mathbb{P}(X + Z = 2) = 1/2$, mais d'un autre côté $\mathbb{P}(Y + Z = 1) = 1$, et donc $X + Z$ et $Y + Z$ n'ont pas la même loi.

Exercice 2.9. Un lac contient N poissons. (N est inconnu et $N > 2000$). On pêche 1000 poissons, on les marque et on les rejette à l'eau. On repêche alors 1000 poissons (uniformément parmi tous les poissons du lac et indépendamment de la première pêche). Soit X le nombre de poissons marqués parmi ceux que l'on a repêchés.

1. Calculer la loi de X.
2. Calculer $\mathbb{E}[X]$. *Indication : écrire X sous la forme $X = \sum_{i=1}^{N} \mathbf{1}_{A_i}$, avec les bons événements A_i.*
3. Parmi les 1000 poissons repêchés, 10 étaient marqués. On cherche à estimer le nombre de poissons dans le lac. Déterminer N pour que $\mathbb{P}(X = 10) \geq \mathbb{P}(X = k)$ pour tout $k \in \mathbb{N}$ et que $\mathbb{P}(X = 10)$ soit le plus grand possible.

Solution.

1. Calculons $\mathbb{P}(X = k)$. Il y a $\binom{1000}{k}$ façons de pêcher k poissons parmi tous les poissons marqués. Puis il y a $\binom{N-100}{1000-k}$ façons de pêcher les autres. De plus il y a $\binom{N}{1000}$ façons de pêcher 1000 poissons dans le lac. La loi de X est alors donnée par :
$$\mathbb{P}(X = k) = \frac{\binom{1000}{k}\binom{N-1000}{1000-k}}{\binom{N}{1000}}, \quad k = 0, 1, \cdots, 1000\,.$$
X suit une loi hypergéométrique de paramètres N et 1000.
2. On écrit $X = \sum_{i=1}^{1000} \mathbf{1}_{A_i}$, où A_i est l'événement "le $i^{\text{ème}}$ poisson repêché est marqué". On a donc $\mathbb{E}[X] = \sum_{i=1}^{1000} \mathbb{P}(A_i)$, et $\mathbb{P}(A_i) = \mathbb{P}(A_1) = \frac{1000}{N}$.
3. On obtient facilement l'égalité
$$\frac{\mathbb{P}(X = k+1)}{\mathbb{P}(X = k)} = \frac{(1000-k)^2}{(k+1)(N - 2000 + k + 1)}\,.$$
Ce quotient est décroissant en $k \in \{0, ..., 1000\}$. On obtient alors l'équivalence
$$\frac{\mathbb{P}(X = 11)}{\mathbb{P}(X = 10)} \leq 1 \leq \frac{\mathbb{P}(X = 10)}{\mathbb{P}(X = 9)} \Leftrightarrow \mathbb{P}(X = 10) \geq \mathbb{P}(X = k) \quad \forall k.$$
De plus $\frac{\mathbb{P}(X=k+1)}{\mathbb{P}(X=k)}$ est décroissant en N. En résolvant $(1000-9)^2 = (9+1)(x-2000+9+1)$ on obtient $x = 100199,1$, puis $N = 100200$.

Exercice 2.10. Un chimpanzé tape à la machine à écrire en appuyant chaque seconde sur une touche choisie au hasard. Quelle est la probabilité qu'il parvienne à écrire *Hamlet*, c'est-à-dire qu'à un certain moment il écrive d'une traite le texte de cette pièce ?

Solution. Soit n la longueur, en caractères, de la pièce Hamlet. La probabilité p qu'il tape la pièce du premier coup est faible, mais strictement positive. Pour tout entier naturel k, on définit une variable aléatoire X_k qui vaut 1 si les caractères $nk+1$ à $n(k+1)$ correspondent au texte de la pièce, et 0 sinon. Les X_k sont des bernouillis indépendantes de paramètre $p > 0$: ce sont les mêmes que dans un jeu de pile ou face biaisé. Or on sait dans ce cas qu'il finira par sortir un pile, ce qui correspond ici à écrire le texte de la pièce d ?une traite. La probabilité que le chimpanzé écrive Hamlet au bout d'un certain nombre (aléatoire, mais fini) de tentatives vaut donc 1.