Série d'exercices n° 1. Premiers pas

Une étoile désigne un exercice important.

Rappel de notations :
$C_n^k = \binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$ est le nombre de choix **non ordonnés** de k éléments distincts pris parmi n.
$A_n^k = \frac{n!}{(n-k)!}$ est le nombre de choix **ordonnés** de k éléments distincts pris parmi n.

Exercice 1.1. De combien de façons peut-on mettre n boules numérotées dans p urnes ? De combien de façons peut-on mettre n boules identiques dans p urnes ?

Solution.

1. Il y a p choix indépendants pour chaque boule, soit p^n manières de placer n boules numérotées dans p urnes.
2. Si les boules sont identiques, cela revient à considérer $n+p-1$ positions alignées, avec deux parois aux deux extrémités. Sur les $n+p-1$ positions, on place n boules et $p-1$ parois, dessinant ainsi p urnes dont la somme des boules est égale à n. Voici un exemple lorsque $n=5$; $p=3$: il y a 2 boules dans la première urne, 0 dans la deuxième, 3 dans la troisième :

$$|**||***|$$

   On choisit donc la positions des n boules parmi les $n+p-1$ positions possibles, les $p-1$ parois étant alors placées dans les positions restantes. De manière analogue, on pourrait aussi placer les $p-1$ parois. Il y a donc $\binom{n+p-1}{n} = \binom{n+p-1}{p-1}$ manières de le faire.
   On peut aussi voir que ce problème revient à décomposer n comme somme de p entiers naturels, où l'entier naturel n_i représente le nombre de boules dans la $i^{\text{ème}}$ urne.

Exercice 1.2. Une urne contient 10 boules numérotées de 1 à 10. On tire avec remise 4 boules de l'urne.

1. Décrire un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ pouvant modéliser cette expérience.
2. Déterminer les probabilités d'obtenir :
   (a) quatre nombres dans un ordre strictement croissant.
   (b) quatre nombres dans un ordre croissant (au sens large).
   (c) au moins une fois le nombre 3.

Solution.

1. L'espace probabilisé associé à cette expérience peut s'écrire :

$$\Omega = \{(a_1, a_2, a_3, a_4) : a_i = 1, \cdots, 10\}.$$

   Le cardinal de l'ensemble Ω est : $\mathrm{card}(\Omega) = 10^4$. La probabilité définie sur $\mathcal{P}(\Omega)$ est la probabilité uniforme : $\forall \omega \in \Omega, \mathbb{P}(\{\omega\}) = 1/10^4$. La probabilité de tout élément A de $\mathcal{P}(\Omega)$ se calcule alors ainsi :

$$\mathbb{P}(A) = \sum_{\omega \in A} \mathbb{P}(\{\omega\}) = \frac{\mathrm{card}(A)}{\mathrm{card}(\Omega)}.$$

2. (a) Soit A_1 l'ensemble de tous les quadruplets dans un ordre strictement croissant. Alors le nombre d'éléments de A_1 est le nombre de combinaisons : $\binom{10}{4}$. On peut le montrer de 2 façons différentes :

- A_1 est en bijection avec l'ensemble des parties à 4 éléments pris parmi 10. En effet, chaque partie est associée de manière unique avec une suite croissante (il suffit d'arranger les éléments par ordre croissant)

- on peut aussi voir que le nombre de quadruplets (a_1, a_2, a_3, a_4) avec 4 éléments distincts pris parmi 10 est A_{10}^4, qu'on doit ensuite diviser par 4! pour ne compter que les quadruplets qui sont strictement croissants.

La probabilité d'obtenir quatre nombres dans un ordre strictement croissant est donc $\mathbb{P}(A_1) = \binom{10}{4}/10^4 = 0,021$.

(b) Soit A_2 l'ensemble de tous les quadruplets dans un ordre croissant au sens large. Dans A_2, il y a 10 quadruplets de nombres tous identiques, $2 \times \binom{10}{2}$ quadruplets de nombres dont trois sont égaux, $3 \times \binom{10}{3}$ quadruplets de nombre dont deux sont égaux, $\binom{10}{2}$ quadruplets de nombres composés de deux couples de nombres identiques et $\binom{10}{4}$ quadruplets de nombres tous distincts. Soit $P(A_2) = \Big(10 + 2 \times \binom{10}{2} + 3 \times \binom{10}{3} + \binom{10}{2} + \binom{10}{4}\Big)/10^4 = 0,0715$.

On peut aussi raisonner de la manière suivante : L'application $(a_1, a_2, a_3, a_4) \mapsto (a_1, a_2+1, a_3+2, a_4+3)$ est une bijection de A_2 sur l'ensemble $A_2' = \{(a_1, a_2, a_3, a_4) : a_1 < a_2 < a_3 < a_4,\ a_i = 1, \cdots, 13\}$. Le cardinal de A_2 est donc égal à celui de A_2', c'est à dire $\binom{13}{4}$.

(c) Soit A_3 l'événement correspondant. Alors le cardinal du complémentaire A_3^c de A_3 est le nombre de quadruplets obtenus en réalisant cette expérience avec 9 nombres, c'est à dire $\mathrm{card}(A_3^c) = 9^4$. On a alors $\mathbb{P}(A_3) = 1 - \mathbb{P}(A_3^c) = 1 - (9/10)^4 = 0,3439$.

Exercice 1.3. Soient A et B deux événements d'un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ tels que $\mathbb{P}(A) = \mathbb{P}(B) = 3/4$. Donner un encadrement optimal pour la valeur de $\mathbb{P}(A \cap B)$. Donner des exemples dans lesquels les bornes de l'encadrement sont atteintes.

Solution. Il est clair que ces deux événements peuvent être tels que : $\mathbb{P}(A \cup B) = 1$. Or, d'après une propriété bien connue des mesures de probabilité, nous avons :

$$\mathbb{P}(A \cup B) = \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B) - \mathbb{P}(A \cap B)\,.$$

La valeur minimale que peut prendre $\mathbb{P}(A \cap B)$ est donc : 1/2. D'autre part, on a $\mathbb{P}(A \cap B) \leq \mathbb{P}(A) = 3/4$.

Donnons un exemple. Soit $\Omega = \{1, 2, 3, 4\}$. On considère la probabilité uniforme $\mathbb{P}$ sur $\mathcal{P}(\Omega)$. Pour $A = B = \{1, 2, 3\}$, $\mathbb{P}(A \cap B) = \frac{3}{4}$: le maximum est atteint. Pour $A = \{1, 2, 3\}$, $B = \{2, 3, 4\}$, $\mathbb{P}(A \cap B) = \frac{1}{2}$: le minimum est atteint.

⋆ **Exercice 1.4.** Une urne contient trois sacs. Le sac S_1 contient 2 pièces d'or, le sac S_2 contient 2 pièces ordinaires, le sac S_3 contient une pièce d'or et une pièce ordinaire. Le jeu consiste à tirer un sac au hasard (avec probabilité uniforme) puis à tirer une pièce au hasard dans ce sac.

1. Quelle est la probabilité de tirer une pièce d'or ?
2. Supposons que l'on ait tiré une pièce d'or. Quelle est alors la probabilité pour que l'autre pièce du sac soit en or ?

Solution. On note S_i, l'événement : {tirer le sac S_i}, $i = 1, 2, 3$, A, l'événement : {tirer une pièce d'or} et B, l'événement : {tirer une pièce ordinaire}.
1) Soit Ω l'espace probabilisé, alors $\Omega = S_1 \cup S_2 \cup S_3$ et

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(A) &= \mathbb{P}(A \cap (S_1 \cup S_2 \cup S_3)) \\
&= \mathbb{P}(A \cap S_1) + \mathbb{P}(A \cap S_2) + \mathbb{P}(A \cap S_3) \\
&= 1/3 \times 1 + 1/3 \times 0 + 1/3 \times 1/2 = 1/2\,.
\end{aligned}$$

2) La probabilité que l'on cherche est $P(S_1 \,|\, A)$. Il est évident que $\mathbb{P}(A \,|\, S_1) = 1$, d'où :

$$\mathbb{P}(S_1 \,|\, A) = \mathbb{P}(A \,|\, S_1)\frac{\mathbb{P}(S_1)}{\mathbb{P}(A)} = 2/3\,.$$

Exercice 1.5. Un document a été perdu. La probabilité pour qu'il se trouve dans un meuble est p, $(0 < p < 1)$. Ce meuble comporte sept tiroirs. Dans le cas où le document est dans le meuble, il se trouve avec même probabilité dans chacun des sept tiroirs. On explore six tiroirs sans trouver le document. Quelle est la probabilité de le trouver dans le septième ?

Solution. Soit A l'événement : {le document se trouve dans le septième tiroir}, et B l'événement : {le document se trouve dans l'un des six premiers tiroirs}. La probabilité que l'on cherche est $\mathbb{P}(A \,|\, B^c)$. D'une part, $\mathbb{P}(A) = p/7$, $\mathbb{P}(B) = 6p/7$ et d'autre part A est inclus dans B^c donc

$$\mathbb{P}(A \,|\, B^c) = \frac{\mathbb{P}(A \cap B^c)}{\mathbb{P}(B^c)} = \frac{\mathbb{P}(A)}{1 - \mathbb{P}(B)} = \frac{p}{7 - 6p}\,.$$

Exercice 1.6. On propose un QCM à une étudiant : 5 réponses possibles sont proposées. L'étudiant connaît (et donne) la bonne réponse avec probabilité p, et s'il ne la connaît pas, il choisit une des 5 possibilité au hasard.

1. Quelle est la probabilité que la réponse donnée par l'étudiant soit la bonne ?
2. Le correcteur, une fois la copie en main, voit que l'étudiant a donné la bonne réponse. Quelle est la probabilité qu'il connaissait la bonne réponse ?

Solution.

1. On décompose la probabilité :

$$\mathbb{P}(\text{bonne réponse}) = \mathbb{P}(\text{connaît}) + \mathbb{P}(\text{ne connaît pas mais choisit la bonne par hasard})$$
$$p + (1-p)\frac{1}{5} = \frac{4p+1}{5}$$

2. On cherche

$$\mathbb{P}(\text{connaît} \mid \text{bonne réponse}) = \frac{\mathbb{P}(\text{connaît } \cap \text{ bonne réponse})}{\mathbb{P}(\text{bonne réponse})} = \frac{5p}{4p+1}$$

Exercice 1.7. On tire deux cartes d'un jeu de 32. Quelle est la probabilité d'obtenir une paire ? Si l'on n'a pas obtenu une paire, on a le choix entre jeter l'une des deux cartes tirées et en retirer une parmi les 30 restantes, ou jeter les deux cartes tirées et en retirer deux parmi les 30 restantes. Quelle stratégie donne la plus grande probabilité d'avoir une paire à la fin ?

Solution. On choisit comme univers Ω l'ensemble des tirages de deux cartes non ordonnées parmi 32, ainsi $|\Omega| = \binom{32}{2}$. On munit Ω de la tribu $\mathcal{F} = \mathcal{P}(\Omega)$ et de la probabilité uniforme $\mathbb{P}$, de sorte que pour tout évènement A de $\mathcal{F}$, on a :

$$\mathbb{P}(A) = \frac{|A|}{|\Omega|} = \frac{|A|}{\binom{32}{2}} = \frac{|A|}{16 \times 31}\,.$$

Soit A l'événement "on tire une paire". Alors $|A| = \binom{8}{1}\binom{4}{2} = 48$ (8 choix pour la hauteur de la paire et $\binom{4}{2}$ choix pour les deux couleurs). Ainsi, $\mathbb{P}(A) = \frac{48}{16\times 31} = \frac{3}{31} \approx 0,097$. Supposons que l'on n'ait pas obtenu de paire.

Pour la première stratégie, on prend comme univers Ω_1 le tirage d'une carte parmi 30, avec l'information de la carte gardée ; ainsi $|\Omega_1| = 30$. L'événement A est encore "on tire une paire", vu comme un sous ensemble de Ω_1 cette fois. On a alors $|A| = \binom{3}{1}$, car il y a 3 choix pour la couleur de la deuxième carte, dont la hauteur est fixée par la carte gardée. Ainsi, $\mathbb{P}(A) = \frac{3}{30} = \frac{1}{10}$

Pour la deuxième stratégie, on prend comme univers Ω_2, l'ensemble des tirages de 2 cartes parmi 30, avec l'information des deux cartes jetées, ainsi $|\Omega_2| = \binom{30}{2}$. L'événement A est vu comme un sous-ensemble de Ω_2. On a $|A| = \binom{2}{1}\binom{3}{2} + \binom{6}{1}\binom{4}{2}$. En effet, soit on choisit une des deux hauteurs des cartes jetées, auquel cas, il y a 2 choix parmi 3 pour la couleur, soit on choisit une des 6 autres hauteurs, auquel cas on 2 choix parmi 4 pour la couleur. Donc, $\mathbb{P}(A) = \frac{6+36}{15\times 29} = \frac{14}{145} < \frac{1}{10}$.

C'est donc la première stratégie qui donne la plus grandes possibilité d'obtenir une paire.

Exercice 1.8. Une urne contient N boules numérotées de 1 à N. On tire successivement sans remise n boules de l'urne, avec $1 \leq n \leq N$.

1. Quel est l'ensemble Ω des résultats possibles ? Calculer card(Ω).
2. Les boules numérotées de 1 à M sont rouges ($M < N$) et les boules numérotées de $M+1$ à N sont blanches. Soit A_k l'événement {La k-ième boule tirée est rouge}.
   (a) Calculer $\mathbb{P}(A_k)$.
   (b) Calculer $\mathbb{P}(A_k \cap A_m)$.

Solution.

1. L'espace probabilisé associé à cette expérience peut s'écrire :

$$\Omega = \{(a_1, a_2, \cdots, a_n) : a_i \in \{1, \cdots, N\}, a_i \neq a_i, \text{ si } i \neq j\}.$$

Le cardinal de cet ensemble est : card(Ω)=$A_N^n = N(N-1)\cdots(N-n+1)$. Celui-ci étant muni de la probabilité uniforme, on a pour tout $A \in \mathcal{P}(\Omega)$,

$$\mathbb{P}(A) = \sum_{\omega \in A} \mathbb{P}(\{\omega\}) = \frac{\text{card}(A)}{\text{card}(\Omega)}.$$

2. (a) A_k s'écrit : $A_k = \{(a_1, \cdots, a_n) \in \Omega : a_k \in \{1, 2, \cdots, M\}\}$. On doit dénombrer A_k. On propose 2 solutions :
- l'application

$$\begin{array}{ccc} A_k & \longrightarrow & A_1 \\ (a_1, \cdots, a_k, \cdots, a_n) & \mapsto & (a_k, a_2, \cdots, a_{k-1}, a_{k+1}, \cdots, a_n) \end{array}$$

est une bijection de A_k dans A_1, d'où card(A_k)=card(A_1). Le cardinal de A_1 est : card(A_1)=$M(N-1)\cdots(N-n+1)$.
- On peut aussi dénombrer directement l'ensemble A_k. On a M choix pour la boule k. Une fois la boule k choisie, le nombre de choix pour les boules restantes est donné par le nombre de choix ordonnés de $n-1$ éléments distincts pris parmi $N-1$, à savoir A_{N-1}^{n-1}. On obtient card(A_k)=MA_{N-1}^{n-1}.

On a donc $\mathbb{P}(A_k) = M/N$. (Remarquons que la probabilité de l'événement A_k ne dépend pas de k et est égale à la proportion de boules rouges dans l'urne). On propose une autre solution pour calculer $\mathbb{P}(A_k)$. Notons X_k le numéro de la boule k. C'est donc une variable aléatoire. Par symétrie, on a $\mathbb{P}(X_k = 1) = \mathbb{P}(X_k = 2) = \ldots = \mathbb{P}(X_k = N)$, donc vu que $\sum_{i=1}^{N} \mathbb{P}(X_k = i) = 1$, on obtient que $\mathbb{P}(X_k = i) = \frac{1}{N}$ pour tout $i \leq n$. On remarque que $\mathbb{P}(A_k) = \mathbb{P}(X_k \leq M) = \sum_{i=1}^{M} \mathbb{P}(X_k = i) = \frac{M}{N}$.

(b) Si $k = m$ alors $\mathbb{P}(A_k \cap A_m) = M/N$. Supposons que $k \neq m$. De même qu'à la question précédente, on peut établir une bijection entre $A_k \cap A_m$ et $A_1 \cap A_2$, d'où : $\mathbb{P}(A_k \cap A_m) = \mathbb{P}(A_1 \cap A_2)$. Enfin il est facile de voir que le cardinal de $A_1 \cap A_2$ est : card$(A_1 \cap A_2)$=$M(M-1)(N-2)\cdots(N-n+1)$, soit $\mathbb{P}(A_k \cap A_m) = M(M-1)/[N(N-1)]$. On peut encore donner une autre solution : On a M choix pour la boule k puis $M-1$ choix pour la boule m. Une fois ces deux boules choisies, il s'agit de compter le nombre de choix ordonnésde $n-2$ éléments pris parmi $N-2$, donc card$(A_k \cap A_m)$=$M(M-1)A_{N-2}^{n-2}$ puis $\mathbb{P}(A_k \cap A_m) = M(M-1)\frac{A_{N-2}^{n-2}}{A_N^n}$.

⋆ **Exercice 1.9.** *(Formule d'inclusion/exclusion).* Soit $(A_k)_{k\in\mathbb{N}}$ une suite d'événements d'un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$.

1. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$,
$$\mathbf{1}_{\cap_{k=1}^n A_k} = \prod_{k=1}^n \mathbf{1}_{A_k}.$$
2. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$,
$$\mathbf{1}_{\cup_{k=1}^n A_k} = 1 - \prod_{k=1}^n (1 - \mathbf{1}_{A_k}).$$
3. On note $p_k = \sum_{1\leq i_1 < i_2 < \cdots < i_k \leq n} \mathbb{P}(A_{i_1} \cap A_{i_2} \cap \cdots \cap A_{i_k})$. Montrer que
$$\mathbb{P}(\cup_{k=1}^n A_k) = \sum_{k=1}^n (-1)^{k-1} p_k.$$
4. n personnes participent à un *père Noël secret* : les noms des n personnes (que l'on suppose tous différents) sont écrits sur des étiquettes, et chaque personne tire au hasard une étiquette (et la garde) – le nom écrit sur cette étiquette est celui de la personne à qui elle doit faire un cadeau. On note $p(n)$ la probabilité qu'au moins une personne tire une étiquette avec son propre nom. Expliciter $p(n)$. Calculer $\lim_{n\to\infty} p(n)$.

Solution.

1. Il suffit de remarquer que $\omega \in \cap_{k=1}^n A_k$ si et seulement si $\omega \in A_k$ pour tout $k = 1, \cdots, n$, c'est à dire si et seulement si $\mathbf{1}_{A_k}(\omega) = 1$ pour tout $k = 1, \cdots, n$.
2. D'une part on a :
$$\mathbf{1}_{\cup_{k=1}^n A_k} = \mathbf{1}_{(\cap_{k=1}^n A_k^c)^c} = 1 - \mathbf{1}_{\cap_{k=1}^n A_k^c}.$$
D'autre part, d'après la relation établie en 1) :
$$\mathbf{1}_{\cap_{k=1}^n A_k^c} = \prod_{k=1}^n \mathbf{1}_{A_k^c}.$$
On conclut en appliquant l'identité $\mathbf{1}_{A_k^c} = 1 - \mathbf{1}_{A_k}$ une nouvelle fois.
3. Il suffit de développer le dernier terme de l'identité établie en 2), c'est à dire :
$$\prod_{k=1}^n (1 - \mathbf{1}_{A_k}) = 1 - \sum_{k=1}^n (-1)^{k-1} \sum_{1\leq i_1 < \cdots < i_k \leq n} \mathbf{1}_{A_{i_1} \cap \cdots \cap A_{i_k}}.$$
La formule du 3) vient alors de celle établie en 2) et de la linéarité de l'espérance. (Il faut aussi remarquer que que $E(\mathbf{1}_A) = P(A)$ pour tout événement A.)

4. On numérote les étiquettes et les noms de 1 à n. Soit A_k l'évènement $\{$l'étiquette k est attribuée au nom $k\}$. On cherche la probabilité de l'évènement $A = \bigcup_{k=1}^n A_k$. Pour utiliser 3), il faut déterminer p_k. Soit $i_1 < i_2 < \ldots < i_k$. L'espace Ω est l'ensemble des configurations de n étiquettes réparties sur n noms. On a Card(Ω)=$n!$. L'évènement $A_{i_1} \cap A_{i_2} \cap \ldots \cap A_{i_k}$ est l'ensemble des configurations telles que l'étiquette i_j est attribuée au nom i_j, pour $j = 1 \ldots k$. Comptons son cardinal. Pour chaque $j = 1 \ldots k$, on a un seul choix pour le nom i_j. Il reste ensuite à répartir $n-k$ étiquettes pour $n-k$ noms, ce qui donne $(n-k)!$ configurations possibles. Donc $\mathbb{P}(A_{i_1} \cap A_{i_2} \cap \ldots \cap A_{i_k}) = \frac{(n-k)!}{n!}$. D'où $p_k = \sum_{1 \leq i_1 < \cdots < i_k \leq n} \mathbb{P}(A_{i_1} \cap \cdots \cap A_{i_k}) = \binom{n}{k}(n-k)!/n! = 1/k!$, et $p(n) = \mathbb{P}(A) = \sum_{k=1}^n (-1)^{k-1}/k!$, d'après la question précédente. Il découle du développement en série de l'exponentielle que la limite de $p(n)$ lorsque n tend vers $+\infty$ est $1 - 1/e$.