

Partiel du 25 mars 2015. Durée 2h.
Sans documents ni calculatrice ni portable.

Notations : \mathbb{P} est la probabilité de référence, p.s. signifie presque sûrement, v.a. signifie variable aléatoire. $\mathbb{E}[U]$ désigne l'espérance de la v.a. U .

\mathbb{N} désigne l'ensemble des entiers naturels, $\mathbb{1}$ est la fonction indicatrice de l'ensemble A .

Question de cours.

- 1) Donner les définitions de la fonction de répartition et de la fonction caractéristique d'une v.a.
- 2) Énoncer le lemme de Borel-Cantelli.
- 3) Donner les définitions de la convergence en probabilité et de la convergence en loi.

Exercice 1. La variable aléatoire X suit la loi $\mathcal{N}(0, 1)$. On fixe $m \in \mathbb{R}$ et $\sigma > 0$, et on définit $Y = e^{\sigma X + m}$.

- 1) Montrer que Y possède une densité que l'on déterminera.
- 2) a) Montrer, pour tous x et y réels, l'égalité

$$\mathbb{E}[e^{(x+iy)X}] = e^{\frac{x^2}{2} + iy} \mathbb{E}[e^{iyX}].$$

- b) Montrer, que pour y réel, l'espérance $\mathbb{E}[e^{iyX}]$ est réelle.
- 3) Dans cette question, on suppose que $m = 0$ et $\sigma = 1$. On considère la fonction φ définie par

$$\varphi(x) = \frac{1}{x\sqrt{2\pi}}(1 + \sin(\pi \ln x))e^{-\frac{1}{2}(\ln x)^2} \mathbb{1}_{]0, \infty[}(x)$$

- a) Montrer que φ est une densité de probabilité.
- b) Soit Z une variable aléatoire de densité φ . Montrer que $\mathbb{E}[Y^n] = \mathbb{E}[Z^n]$ pour tout entier $n \geq 1$. On pourra utiliser le résultat de la question 2).

Exercice 2. $(X_n)_{n \geq 1}$ et $(Y_n)_{n \geq 1}$ désignent deux suites de variables aléatoires.

- 1) On suppose dans cette question que X_n converge en loi vers une variable aléatoire X et que Y_n converge en loi vers une constante c .
 - a) Montrer que Y_n converge en probabilité vers c . On pourra utiliser la caractérisation de la convergence en loi par la fonction de répartition.
 - b) Montrer que pour tout t réel, $\mathbb{E}[e^{it(X_n+Y_n)} - e^{it(X_n+c)}]$ tend vers 0.
 - c) Montrer que $X_n + Y_n$ converge en loi vers $X + c$.
- 2) Montrer que si X_n converge en probabilité vers une v.a. X et Y_n converge en probabilité vers une v.a. Y , alors $X_n + Y_n$ converge en probabilité vers $X + Y$.

Exercice 3. p et q sont deux réels dans $]0, 1[$. On note S et T deux v.a. indépendantes de lois géométriques sur \mathbb{N} de paramètres respectifs p et q .

Rappel : cela signifie que pour tout entier naturel, on a $\mathbb{P}(S = n) = (1 - p)p^n$ et $\mathbb{P}(T = n) = (1 - q)q^n$.

- 1) Montrer que $\mathbb{P}(S \geq m) = p^m$ et $\mathbb{P}(T \geq m) = q^m$ pour tout entier naturel m .
- 2) Déterminer la loi de $\min(S, T)$ ainsi que celle de $S - T$, et montrer que ces deux variables sont indépendantes.