UPMC 2011-2012
Licence L3 - LM 390 - 1ère session

Examen du 29 Mai 2012. Durée 3h.
Sans documents ni calculatrice ni portable.

Notations : v.a. signifie variable aléatoire réelle. $\mathbf{N}$ est l'ensemble des entiers naturels, $\mathbf{R}$ celui des réels. p.s. signifie presque sûrement.

Question de Cours.

1) Enoncer la loi forte des grands nombres.
2) Donner la définition de la convergence en loi.

Exercice 1.

1) Montrer que la fonction u définie pour tout réel x par $u(x) = \mathrm{e}^{-x}\mathrm{e}^{-\mathrm{e}^{-x}}$ est une densité de probabilité sur $\mathbf{R}$.

2) $(X_n)_{n\in\mathbf{N}}$ désigne une suite de v.a. indépendantes de même loi exponentielle de paramètre 1. On définit la v.a. $Z_n = \max(X_i, 1 \leq i \leq n) - \log n$ pour tout entier $n \geq 1$.

a) Calculer la fonction de répartition d' une v.a. loi exponentielle de paramètre 1.

b) Montrer que la suite (Z_n) converge en loi vers vers une v.a. de densité u.

3) On suppose dans cette question que $(X_n)_{n\in\mathbf{N}}$ est une suite de v.a. indépendantes de même loi exponentielle de paramètre $\lambda > 0$. Sur le modèle de la question précédente construire une suite qui converge en loi vers une v.a. de densité u.

Exercice 2.

Soit X une v.a. réelle de loi $\mathcal{N}(0,1)$ de densité f et de fonction caractéristique Φ. On note $f^{(k)}$ la dérivée de f d' ordre k.

1) Rappeler l'expression de Φ (on ne demande pas la démonstration). En déduire que pour tout réel t on a l' égalité :

$$\mathrm{e}^{-\frac{t^2}{2}} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{e}^{-itx}\mathrm{e}^{-\frac{x^2}{2}}\,dx$$

2) a) Montrer que pour tout entier $k \geq 1$, il existe un polynome P_k tel que $f^{(k)}(x) = (-1)^k P_k(x) f(x)$ pour tout réel x.

b) Expliciter P_1, P_2 et P_3.

3) Montrer que pour tout entier $k \geq 1$ et pour tout x réel, $\int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{e}^{-itx}(ix)^k \mathrm{e}^{-\frac{x^2}{2}} dx = P_k(x) f(x)$.

Exercice 3.

X désigne une v.a. de densité h dont la fonction caractéristique φ vérifie $\int_{-\infty}^{+\infty} |\varphi(x)| dx < +\infty$. On suppose que h est continue et bornée, que $\int_{-\infty}^{+\infty} x h(x) dx = 0$ et $\int_{-\infty}^{+\infty} x^2 h(x) dx = 1$.

1) Dans cette question on souhaite démontrer la propriété $(*)$:

$$\forall t \in \mathbf{R}, \quad \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{e}^{-itx} \varphi(x) dx = h(t).$$

a) Montrer que pour tout réel t et toute v.a. réelle Y de fonction caractéristique Ψ,

$$\mathbf{E}(\varphi(Y) \mathrm{e}^{-itY}) = \mathrm{E}(\Psi(X - t)).$$

Indication : on pourra démontrer d' abord que $\varphi(y) \mathrm{e}^{-ity} = \int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{e}^{iy(x-t)} h(x) dx$ et supposer que Y possède une densité.

b) En déduire que pour tout réel $a > 0$ et tout réel t,

$$\frac{a}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{e}^{-iyt} \varphi(y) \mathrm{e}^{-\frac{a^2 y^2}{2}} dy = \int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{e}^{-\frac{(x-t)^2}{2a^2}} h(x) dx.$$

c) En déduire la propriété $(*)$ en faisant tendre a vers 0 dans la question précédente.

2) On considère une suite de v.a. $(X_i, i \geq 1)$ indépendantes et de même loi que X et pour tout entier $n \geq 1$, on définit $S_n := \sum_{i=1}^n X_i$.

a) Montrer que la v.a. $\frac{S_n}{\sqrt{n}}$ admet une densité continue et bornée. On la note f_n.

b) Exprimer la fonction caractéristique de la v.a. $\frac{S_n}{\sqrt{n}}$ en fonction de φ.

c) Déduire de la question 1) de cet exercice l' inégalité

$$|f_n(t) - \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \mathrm{e}^{-\frac{t^2}{2}}| \leq \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} |(\varphi(\frac{x}{\sqrt{n}}))^n - \mathrm{e}^{-\frac{x^2}{2}}| dx$$

d) A désigne un réel strictement positif. Montrer que $\int_{-A}^{+A} |(\varphi(\frac{x}{\sqrt{n}}))^n - \mathrm{e}^{-\frac{x^2}{2}}|dx$ tend vers 0 quand A tend vers $+\infty$.