Examen (prototype) : durée 2h

(documents et calculatrices ne sont pas autorisés)

Dans la suite, toutes les variables aléatoires (qu'on abbréviera par v.a.) considérées sont définies sur un espace $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$, qu'on supposera donné.

Notations : $\mathbb{E}[X]$ désigne l'espérance de la v.a. X, et $\mathbb{1}_A$ la fonction indicatrice de l'ensemble A.

Questions de cours :

a) Énoncer (proprement) la définition de l'indépendance de la famille d'événements $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

b) Soit $X : \Omega \to \mathbb{R}$. Donner la définition de la loi de X.

Exercice 1. On tire 2 boules (sans remise), dans une urne contenant 6 boules jaunes, 3 boules vertes et 1 boule noire. On gagne 3 Euros par boule jaune, 6 Euros par boule verte, mais si on tire la boule noire, non seulement on ne gagne rien (peu importe les autres boules), mais on perd 25 Euros. On note X le gain à ce jeu.

a) Quelles sont les valeurs possibles prises par X ?

b) Donner la loi de X.

c) Calculer $\mathbb{E}[X]$.

Exercice 2. Soit $X_1, X_2, \ldots$ une suite de v.a. positives indépendantes de densité $\mathrm{e}^{-x}\mathbb{1}_{\mathbb{R}_+}(x)$. On pose $M_n = \max_{1\le k\le n} X_k$.

a) Déterminer la fonction de répartition de M_n.

b) Déterminer la fonction de répartition de $T_n := M_n - \ln n$.

c) Montrer que la fonction de répartition de T_n converge, et donner sa limite F.

d) F est-elle la fonction de répartition d'une variable aléatoire ? Si oui, cette variable aléatoire possède-t-elle une densité ? Si oui, la donner.

Exercice 3. Soient $X_1, X_2, \ldots$ des variables de Bernoulli *indépendantes* de paramètre 1/2 (correspondants par exemple à un pile ou face). On considère la variable aléatoire

$$\begin{aligned} L_n &= \text{longueur maximale d'une suite de 1 consécutifs dans la séquence } X_1 \cdots X_n \\ &= \max\left\{k\ ;\ \exists i \le n-k+1, X_i = X_{i+1} = \cdots = X_{i+k-1} = 1\right\} \end{aligned}$$

Par exemple, si on considère la séquence 0011010111100, la plus longue séquence de 1 est de longueur égale à 4.

a) Montrer l'inclusion d'événements

$$\{L_n \ge k\} \subset \bigcup_{i=1}^{n} \left\{X_i = X_{i+1} = \cdots = X_{i+k-1} = 1\right\}.$$

En déduire que pour tout $k \ge 1$,

$$\mathbb{P}(L_n \ge k) \le n\left(\frac{1}{2}\right)^k.$$

b) Montrer que pour tout $\varepsilon > 0$, $\mathbb{P}(L_n \geq (1+\varepsilon)\log_2 n) \to 0$ quand $n \to \infty$. (On rappelle que $\log_2 x = \ln x / \ln 2$.)

c) Montrer l'inclusion

$$\{L_n < k\} \subset \bigcap_{j=1}^{\lfloor n/k \rfloor} \bigcup_{i=(j-1)k+1}^{jk} \{X_i = 0\}$$

où $\lfloor x \rfloor$ désigne la partie entière de x. En déduire que pour tout $k \geq 1$,

$$\mathbb{P}(L_n < k) \leq \left(1 - \frac{1}{2^k}\right)^{\lfloor n/k \rfloor}.$$

d) Montrer que pour tout $\varepsilon > 0$, $\mathbb{P}(L_n < (1-\varepsilon)\log_2 n) \to 0$.

e) Qu'en concluez-vous ?