Université Pierre et Marie Curie — Probabilités : 3M290
Année 2015-2016 — groupe de TD 9

Interrogation du 29 février 2016

Durée : 30 min

Question de cours. *2 points*
Donner la définition d'une loi de Poisson de paramètre $\lambda > 0$, et calculer sa fonction génératrice.

Exercice 1. *4 points*
On tire 3 boules (sans remise), dans une urne contenant 6 boules jaunes, 3 boules vertes et 1 boule noire. On gagne 2€ par boule jaune, 4€ par boule verte, mais si on tire la boule noire, non seulement on ne gagne rien (peu importe les autres boules), mais on perd 25€. On note X le gain à ce jeu.

1. Quelles sont les valeurs possibles prises par X ?
2. Donner la loi de X.
3. Calculer $\mathbb{E}[X]$.

Solution.
1. On a $X \in \{-25, 6, 8, 10, 12\}$, suivant que l'on ait une boule noire (peu importe les autres), 3 boules jaunes, 2 jaunes 1 verte, 1 jaune 2 vertes ou 3 vertes.
2. On a

$$\mathbb{P}(X=-25) = \frac{\binom{9}{2}}{\binom{10}{3}} = \frac{3}{10}$$

$$\mathbb{P}(X=6) = \frac{\binom{6}{3}}{\binom{10}{3}} = \frac{1}{6}$$

$$\mathbb{P}(X=8) = \frac{\binom{6}{2}\binom{3}{1}}{\binom{10}{3}} = \frac{3}{8}$$

$$\mathbb{P}(X=10) = \frac{\binom{6}{1}\binom{3}{2}}{\binom{10}{3}} = \frac{3}{20}$$

$$\mathbb{P}(X=12) = \frac{\binom{3}{3}}{\binom{10}{3}} = \frac{1}{120}.$$

3. L'espérance de X est

$$\mathbb{E}[X] = -25 \times \frac{3}{10} + 6 \times \frac{1}{6} + 8 \times \frac{3}{8} + 10 \times \frac{3}{20} + 12 \times \frac{1}{120} = -\frac{19}{10}.$$

Exercice 2. *4 points*
On peut modéliser les passages de bus à l'arrêt 'Jussieu' de deux manières possibles : l'intervalle de temps (en minutes) entre deux passages de bus est

- soit constant, égal à $a \in \mathbb{N}^*$;
- soit une variable aléatoire T, de loi géométrique de paramètre $p \in]0,1[$ (dans ce problème, on utilise la définition suivante $\mathbb{P}(T=k) = (1-p)^{k-1}p$, on rappelle aussi que $\mathbb{P}(T > k) = (1-p)^k$).

On arrive à l'arrêt de bus à 18h, et on se demande quel est le temps que l'on va attendre à l'arrêt. On note $X (\in \mathbb{N}^*)$ le temps écoulé depuis le dernier passage d'un bus, et $Y (\in \mathbb{N})$ le temps qu'il reste à attendre.

1. Dans le premier cas, on suppose que X suit la loi uniforme sur $\{1, \dots, a\}$. Quelle est la loi de Y ? Calculer $\mathbb{E}[Y]$.
2. Dans le deuxième cas, comment faut-il choisir p afin que $\mathbb{E}[T] = a$?
3. Toujours dans le deuxième cas, calculer $\mathbb{P}(Y > k \mid X = n)$ pour tout $n \geq 1$ and $k \geq 0$. En déduire la loi de Y, et calculer $\mathbb{E}[Y]$.

Solution.

1. Y est à valeurs dans $\{0, \dots, a-1\}$, et $\mathbb{P}(Y = k) = \mathbb{P}(X = a - k) = \frac{1}{a}$: Y suit la loi uniforme sur $\{0, \dots, a-1\}$. Et $\mathbb{E}[Y] = \sum_{k=0}^{a-1} k \times \frac{1}{a} = \frac{a-1}{2}$.

2. On calcule $\mathbb{E}[T] = \sum_{k\geq 0} \mathbb{P}(T > k) = \sum_{k \geq 0}(1-p)^k = \frac{1}{p}$ (il y a plein de manières différentes de le calculer). Il faut donc prendre $p = \frac{1}{a}$.

3. On utilise l'interprétation de la loi géométrique en termes de succès/échecs indépendants : un succès est le passage d'un bus, et un échec est le non-pasage d'un bus. Ainsi $X = n$ signifie qu'il y a eu un passage il y a n minutes, et depuis il n'y a eu que des échecs, d'où $\mathbb{P}(X = n) = (1-p)^{n-1}p$. De plus, $Y > k$ s'il n'y a aucun succès dans les k minutes qui suivent 18h (18h inclus). Par indépendance des succès, on a $\mathbb{P}(Y > k \mid X = n) = (1-p)^k$ (le passage d'un bus ne dépend pas du fait de quand le dernier bus est passé : c'est la propriété d'absence de mémoire). On aurait pu le retrouver en écrivant $\mathbb{P}(Y > k \mid X = n) = \mathbb{P}(T > n + k \mid T > n)$. On voit donc que

$$\mathbb{P}(Y > k) = \sum_{n=1}^{+\infty} \mathbb{P}(X = n)\mathbb{P}(Y > k \mid X = n) = \sum_{n=1}^{+\infty} \mathbb{P}(X = n)\mathbb{P}(T > k) = \mathbb{P}(T > k),$$

et Y suit la même loi que T : Y suit la loi géométrique de paramètre p, et $\mathbb{E}[Y] = 1/p$ (même calcul que dans la question 2.)