Université Pierre et Marie Curie
UE 3M290 - Probabilités 1

Licence de Mathématiques L3
Année 2015-2016

Interrogation n°1

Tout appareil électronique (calculatrices, téléphones portables, etc.) est interdit
Durée : 1 heure

Exercice 1

On considère un jeu de loterie qui consiste à effectuer un tirage sans remise de 5 boules parmi 50 boules numérotées de 1 à 50 puis un tirage sans remise de 2 étoiles parmi 11 étoiles numérotées de 1 à 11. Chaque personne mise 2 euros et choisit 5 numéros de boules et 2 numéros d'étoile. Après chaque tirage (où l'ordre dans lequel sont tirées les boules et les étoiles n'est pas pris en compte), une personne gagne une certaine somme en fonction du nombre de boules et d'étoiles tirées qu'elle avait préalablement choisi.

1) Définissez un espace de probabilité $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ adapté à cet énoncé.
   $\Omega = \{\{a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, e_1, e_2\} \,|a_i \in \{1, \ldots, 50\}, e_k \in \{1, \ldots, 11\}, a_i \neq a_j, e_k \neq e_l$ si $i \neq j$ et $k \neq l\}$., $\mathcal{F} = \mathcal{P}(\Omega)$ et $\mathbb{P}$ probabilité uniforme sur Ω.
2) Quelle est la probabilité de tirer le gros lot (ie. d'obtenir les 5 bonnes boules et les 2 bonnes étoiles) ?
   C'est exactement la probabilité de tirer une combinaison en particulier.
   C'est-à-dire $1/Card(\Omega) = 1/\left(\binom{50}{5} \times \binom{11}{2}\right)$.
3) On suppose que l'on gagne à partir du moment oú l'on a au moins 2 bons numéros de boules, ou alors un bon numéro de boules et deux bonnes étoiles. Quelle est la probabilité de gagner quelque chose ? Exprimer ceci sous la forme : "on a environ une chance sur ... de gagner".
   Soit les événements A *={"On obtient au moins de bons numéros de boules"} et* B *={"On obtient un bon numéro de boules et deux bonnes étoiles"}. Calculons tout d'abord* A_n *={"On obtient exactement n bons numéros de boules"}. Pour déterminer le cardinal de* A*, on commence par dénombrer le nombre de combinaison possible pour les* n *bons numéros* $\binom{5}{n}$*, puis on de même pour les mauvais numéros* $\binom{45}{5-n}$*, tout en prenant l'ensemble des combinaisons possibles pour les étoiles* $\binom{11}{2}$*. Alors* $Card(A_n) = \binom{5}{n} \times \binom{45}{5-n} \times \binom{11}{2}$*. Les* A_n *sont des événements disjoints, d'où* $Card(A) = \sum_{k=2}^{5} Card(A_k)$*. Pour l'événement* B*, de la même façon, on obtient* $5 \times \binom{45}{4}$*. L'événement* C *={"On gagne"} à donc pour cardinal :* $Card(C) = 5 \times \binom{45}{4} + \sum_{k=2}^{5} Card(A_k)$*. Calcul de la probabilité :* $\mathbb{P}(C) = Card(C)/Card(\Omega) = 5 \times \binom{45}{4}/\left(\binom{50}{5} \times \binom{11}{2}\right) + \left(\sum_{k=2}^{5} \binom{5}{n} \times \binom{45}{5-n}\right)/\binom{50}{5}$.
   Soit $\mathbb{P}(C) \approx 10 \times \left(\binom{45}{3} + \binom{45}{2}\right)/\binom{50}{5} \approx 10\left(\frac{43}{3} + 1\right) \times \left(\frac{5*4*3*45*44}{50*49*48*47*46}\right) \approx \frac{1}{14}$*. On a donc environ une chance sur 14 de gagner.*
4) Est-il plus probable d'avoir deux boules et pas d'étoiles ou alors d'avoir une boule et deux étoiles ? Même question si l'on compare deux boules et une étoile avec une boule et deux étoiles. Est-ce intuitivement cohérent ? *Cardinal associée à l'événement* A *="deux boules et pas d'étoiles" :* $\binom{5}{2} \times \binom{45}{3} \times \binom{9}{2}$*. Associée à l'événement* B *="une boule et deux étoiles" :* $\binom{5}{1} \times \binom{45}{4}$*. Associé à l'événement* C *="deux boules et une étoile" :* $\binom{5}{2} \times \binom{45}{3} \times \binom{9}{1} \times 2$*. On a* $Card(A) > Card(C) > Card(B)$.

Exercice 2

On jette trois dés non pipés.

1) Calculer la probabilité d'avoir au moins un 1.
   Le résultat sur chacun des dés est a priori indépendant. $\mathbb{P}(\text{"Avoir au moins un 1"}) = 1 - \mathbb{P}(\text{"Ne pas obtenir de 1"}) = 1 - \mathbb{P}(\text{"Ne pas obtenir de 1 sur un dé"})^3 = 1 - \left(\frac{5}{6}\right)^3$.
2) Que vaut la probabilité d'obtenir au moins deux faces portant le même chiffre ?
   De la même façon, soit A *={"obtenir au moins deux faces portant le même chiffre"}. On cherche a calculer plutôt le complémentaire, c'est-à-dire obtenir 3 chiffres différents.* $\mathbb{P}(A^c) = \frac{Card(A^c)}{Card(\Omega)} = \frac{6*5*4}{6^3}$*, d'où* $\mathbb{P}(A) = \frac{4}{9}$.

3) Calculer la probabilité que la somme des points marqués sur les trois faces soit paires. *Soit B ={"la somme des points marqués est paire"}. Soit $\omega = (i, j, k) \in \Omega$, on remarque que l'application $\omega \to (7-i, 7-j, 7-k)$ est une bijection de l'ensemble défini par C sur l'ensemble des triplets de somme impaire. Or les deux événements forment une partition de Ω. D'où Card(C)=$\frac{1}{2}$Card(Ω), c'est-à-dire $\mathbb{P}(C) = \frac{1}{2}$*
4) Montrer que les événements considérés en questions 2 et 3 sont indépendants. *En utilisant la même application, on réalise une bijection de $A \cap B$ dans $A \cap B^c$. D'où $Card(A \cap B) = \frac{1}{2}CardA$, c'est-à-dire $\mathbb{P}(A \cap B) = \frac{1}{2}\mathbb{P}(B) = \mathbb{P}(A)\mathbb{P}(B)$*

Exercice 3

Dans un jeu de Pile ou Face, la probabilité d'avoir Pile est p, $0 < p < 1$, et celle d'avoir Face est $q = 1 - p$. Soit S_r le nombre de jets nécessaires pour obtenir r fois Pile.

1) Calculer la fonction génératrice G_1 de S_1.

   S_1 suit une loi géométrique : $\mathbb{P}(S_1) = p(1-p)^{k-1}$. La fonction génératrice associée est $G_1(s_1) = \frac{ps}{1-(1-p)s}$ pour $|s| < \frac{1}{1-p}$.
2) En considérant la variable aléatoire définie par $X_r = S_r - S_{r-1}$, déterminer la fonction génératrice G_r de S_r.

   X_k représente le nombre de jet nécessaire à partir du dernier pile pour obtenir un nouveau pile. Chaque X_k suivent une loi géométrique, et ils sont indépendant (le nombre de lancer pour obtenir un nouveau pile ne dépends du nombre de lancer pour le pile précédent). Ainsi :

$$\mathbb{P}(X_1 = x_1, X_2 = x_2, \ldots, X_r = x_r) = (1-p)^{x_1-1}p(1-p)^{x_2-1}\ldots(1-p)^{x_r-1}p$$

   Reste à calculer la fonction génératrice :

$$G_r(s) = \mathbb{E}\left(s^{S_r}\right) = \mathbb{E}\left(s^{\sum_{k=1}^{r} X_k}\right)$$

$$G_r(s) = \prod_{k=1}^{r} \mathbb{E}\left(s^{X_k}\right) = \left(\frac{ps}{1-(1-p)s}\right)^r$$

3) En déduire la loi de probabilité de S_r.

   On utilise le binôme de Newton généralisé, c'est-à-dire : $\forall |x| < 1, \alpha \in \mathbb{R}, (1+x)^\alpha = \sum_{k=0}^{+\infty} \binom{\alpha}{k} x^k$ où $\binom{\alpha}{k} = \frac{\alpha(\alpha-1)\ldots(\alpha-k+1)}{k!}$. On développe $(1-(1-p)s)^{-r}$ en série :

$$G_r(s) = \sum_{k=0}^{+\infty} C_{r+k-1}^{r-1} p^r (1-p)^k s^{r+k},$$

   et on utilise le fait que la fonction génératrice caractérise la loi pour trouver :

$$\mathbb{P}(S_r = n) = C_{n-1}^{r-1} p^r (1-p)^{n-r} \text{ si } n \geq r.$$

4) Montrer que $\mathbb{E}\left(\frac{r-1}{S_r-1}\right) = p$.

   On a

$$\mathbb{E}\left(\frac{r-1}{S_r-1}\right) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{m-1}{m+x-1} C_{m+x-1}^{m-1} p^m (1-p)^x$$

$$\mathbb{E}\left(\frac{r-1}{S_r-1}\right) = p \sum_{k=0}^{\infty} C_{m+x-2}^{m-2} p^{m-1} (1-p)^x.$$

   On remarque la loi d'une binomiale négative de paramètres $m-1$ et p. En utilisant le fait qu'une loi de probabilité somme à 1, on obtient le résultat escompté.