Université Pierre et Marie Curie
4M011 "Probabilités approfondies"
Examen partiel du lundi 26 octobre 2015 : Corrigé

Exercice 1. On remarque que $(X,\, Y,\, Z)$ est un vecteur gaussien ; c'est donc également le cas pour $(X,\, X+2Z,\, Y)$. La variable $U = \mathbb{E}(X|X+2Z, Y)$ est une combinaison linéaire de Y et de $X+2Z$. Cherchons a et b tels que $U = aY + b(X+2Z)$. Écrivons les conditions d'orthogonalité de $X-U$ avec les variables Y et $X+2Z$. La condition que $\mathbb{E}((X-U)Y) = 0$ donne que $a = 0$. La condition $\mathbb{E}((X-U)(X+2Z))$ donne $b = 1/5$. □

Exercice 2.

(1) $\mathbb{P}(\forall\ k, \quad Y_k > 0) = \prod_k e^{-1/k} = 0$ car $\sum \frac{1}{k} = +\infty$. Donc presque-sûrement, un des Y_k est nul, et la suite (X_n) est nulle à partir d'un certain rang.

(2) La suite ne converge pas dans L^1, car sinon, la suite $\mathbb{E}(X_n)$ convergerait vers $\mathbb{E}(0) = 0$, or $\mathbb{E}(X_n) = 1$ pour tout n.
[Alternativement, on peut aussi utiliser le théorème de Kakutani pour conclure.]

(3) Pour tout n $E|X_n| = E(X_n) = 1$. Donc $\sup_n \mathbb{E}|X_n| = 1 < +\infty$.

(4) On a forcément que le $\sup_n |X_n|$ n'est pas intégrable, car sinon, on pourrait appliquer le théorème de convergence dominée pour avoir la convergence dans L^1, ce qui est impossible.

(5) La suite $(\sqrt{X_n})$ est uniformément intégrable car $\sup_n \mathbb{E}|\sqrt{X_n}|^2 = \sup \mathbb{E}|X_n|$ est fini. □

Exercice 3.

(1) On a facilement $\{T_{AB} \leq n\} = \bigcup_{k=2}^{n} \{(X_{k-1}, X_k) = (A, B)\} \in \mathscr{F}_n$.

(2) En séparant les indices pairs et impairs, on obtient en appliquant l'inégalité de Cauchy-Schwarz

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(T_{AB} > n) &= \mathbb{P}\left((X_{m-1}, X_m) \neq (A, B)\,,\ \text{pour tout } 1 \leq m \leq n\right)\\ &\leq \mathbb{P}\left((X_{m-1}, X_m) \neq (A, B)\,,\ \text{pour } 2 \leq m \leq n\,,\ m \text{ pair}\right)^{1/2}\\ &\qquad \times \mathbb{P}\left((X_{m-1}, X_m) \neq (A, B)\,,\ \text{pour } 1 \leq m \leq n\,,\ m \text{ impair}\right)^{1/2}\end{aligned}$$

Comme les couples $((X_{2k}, X_{2k-1}))_{k\geq 1}$ sont indépendants, on obtient que

$$\mathbb{P}\big((X_{2k-1}, X_{2k}) \neq (A, B)\,, \forall\, 1 \leq k \leq \lfloor n/2 \rfloor\big) = \mathbb{P}\big((X_1, X_2) \neq (A, B)\big)^{\lfloor n/2 \rfloor} = \left(1 - \frac{1}{26^2}\right)^{\lfloor n/2 \rfloor},$$

et on procède de même pour $\mathbb{P}\big((X_{2k}, X_{2k+1}) \neq (A, B)\,, \forall\, 1 \leq k \leq \lfloor n/2 \rfloor - 1\big)$. Au final, on obtient, pour tout $n \geq 2$

$$\mathbb{P}(T_{AB} > n) \leq \left(1 - \frac{1}{26^2}\right)^{\frac{1}{2}(2\lfloor n/2 \rfloor - 1)} \leq \theta^n\,.$$

(3) On a $\mathbb{P}(T_{AB} > n) \to 0$ quand $n \to \infty$, donc $\mathbb{P}(T_{AB} = +\infty) = 0$. De plus,

$$\mathbb{E}[T_{AB}] = \sum_{n=0}^{+\infty} \mathbb{P}(T_{AB} > n) \leq 2 + \sum_{n\geq 2} \theta^n < +\infty.$$

(4) Pour tout $n \in \mathbb{N}$, W_n est $\mathscr{F}_n$−mesurable. De plus $|W_n| \leq |Y_n|+n \leq (26^2+26)n+n$, qui est intégrable. Enfin, calculons

$$\mathbb{E}(Y_{n+1} \mid \mathscr{F}_n) = \sum_{k=1}^{n} 26^2 \mathbf{1}_{\{X_k=B,X_{k-1}=A\}} + 26^2 \mathbf{1}_{X_n=A} \mathbb{E}\left(\mathbf{1}_{X_{n+1}=B} \mid \mathscr{F}_n\right) + 26 \mathbb{E}(\mathbf{1}_{X_{n+1}=A} \mid \mathscr{F}_n)$$
$$= \sum_{k=1}^{n} 26^2 \mathbf{1}_{\{X_k=B,X_{k-1}=A\}} + 26 \mathbf{1}_{X_n=A} + 1 = Y_n + 1 \quad p.s.$$

Donc on a bien $\mathbb{E}(W_{n+1} \mid \mathscr{F}_n) = \mathbb{E}(Y_{n+1} \mid \mathscr{F}_n) - (n+1) = Y_n - n = W_n$ p.s., et $(W_n)_{n\geq 1}$ est bien une martingale.

(5) On borne uniformément, comme Y_n est croissant

$$|W_{n\wedge T_{AB}}| \leq Y_{n\wedge T_{AB}} + n \wedge T_{AB} \leq Y_{T_{AB}} + T_{AB}\,.$$

Or T_{AB} et $Y_{T_{AB}} = 26^2$ sont intégrables, donc $W_{n\wedge T_{AB}}$ est uniformément intégrable, et elle converge p.s. et dans L^1. Comme $T_{AB} < +\infty$ p.s. on a $\lim_{n\to\infty} W_{n\wedge T_{AB}} = W_{T_{AB}}$.

(6) Comme $W_{n\wedge T_{AB}}$ est une martingale, pour tout $n \geq 1$ $\mathbb{E}[W_{n\wedge T_{AB}}] = \mathbb{E}[W_2] = 0$. De plus, $W_{n\wedge T_{AB}}$ converge dans L^1 vers $W_{T_{AB}} = Y_{T_{AB}} - T_{AB} = 26^2 - T_{AB}$, on a donc $0 = \mathbb{E}[W_{T_{AB}}] = 26^2 - \mathbb{E}[T_{AB}]$.

(7) On montre de manière identique à ce qui précède que T_{BB} est un temps d'arrêt fini p.s. et intégrable. En introduisant

$$\widetilde{Y}_n := \sum_{k=2}^{n} 26^2 \mathbf{1}_{\{X_k=B,X_{k-1}=B\}} + 26 \mathbf{1}_{\{X_n=B\}},$$

on montre aussi que $\widetilde{W}_n := \widetilde{Y}_n - n$ est une martingale. La martingale arrêtée $\widetilde{W}_{n\wedge T_{BB}}$ converge aussi p.s. et dans L^1 vers $\widetilde{W}_{T_{BB}} = Y_{T_{BB}} - T_{BB} = 26^2 + 26 - T_{BB}$. On en conclut que

$$0 = \mathbb{E}[W_2] = \mathbb{E}[W_{T_{BB}}] = 26^2 + 26 - \mathbb{E}[T_{BB}]\,.$$

(Bonus) On répète le procédé, avec

$$\overline{Y}_n := \sum_{k=11}^{n} 26^{11} \mathbf{1}_{\{(X_{k-11},\ldots,X_k)=(A,B,R,A,C,A,D,A,B,R,A)\}} + 26^{10} \mathbf{1}_{\{(X_{n-10},\ldots,X_n)=(A,B,R,A,C,A,D,A,B,R)\}}$$
$$+ 26^9 \mathbf{1}_{\{(X_{n-10},\ldots,X_n)=(A,B,R,A,C,A,D,A,B)\}} + \cdots$$

De même, $\overline{W}_n := \overline{Y}_n - n$ est une martingale, et $\overline{W}_{n\wedge T_{ABRACADABRA}}$ converge p.s. et dans L^1 vers

$Y_{T_{ABRACADABRA}} - T_{ABRACADABRA} = 26^{11} + 26^4 + 26 - T_{ABRACADABRA}$.

On finit par obtenir que $\mathbb{E}[T_{ABRACADABRA}] = 26^{11} + 26^4 + 26$. □

Exercice 4.

(1) Pour tout $n \in \mathbb{N}$, M_n est $\mathcal{F}_n$-mesurable. De plus, pour tout n, nous avons $|M_n| \leq nC$ p.s., donc M_n est intégrable. Nous avons également :

$$\mathbb{E}(M_{n+1}|\mathcal{F}_n) = \mathbb{E}(M_n + Y_{n+1}|\mathcal{F}_n) = M_n$$

donc (M_n) est une martingale.

(2) Nous avons :

$$\begin{aligned}\mathbb{E}(M_{n+1}^2|\mathcal{F}_n) &= \mathbb{E}(M_n^2 + 2M_nY_{n+1} + Y_{n+1}^2|\mathcal{F}_n)\\ &= M_n^2 + 2M_n\mathbb{E}(Y_{n+1}|\mathcal{F}_n) + \mathbb{E}(Y_{n+1}^2|\mathcal{F}_n)\\ &= M_n^2 + 0 + (A_{n+1} - A_n)\end{aligned}$$

En prenant l'espérance, nous avons ainsi $\mathbb{E}(M_{n+1}^2) = \mathbb{E}(M_n^2) + \mathbb{E}(A_{n+1}) - \mathbb{E}(A_n)$. La résolution de la récurrence donne ainsi $\sigma_n^2 = \mathbb{E}(A_n)$.

(3) Développons les exponentielles $e^{iuY_{n+1}}$ et $e^{-u^2\mathbb{E}(Y_{n+1}^2|\mathcal{F}_n)/2}$ aux ordres 3 et 2 respectivement. Nous obtenons ainsi :

$$\begin{aligned}e^{iuY_{n+1}} &= 1 + iuY_{n+1} - \frac{u^2}{2}Y_{n+1}^2 + f(uY_{n+1}) && |f(x)| \leq x^3/6\\ e^{-u^2\mathbb{E}(Y_{n+1}^2|\mathcal{F}_n)/2} &= 1 - \frac{u^2}{2}\mathbb{E}(Y_{n+1}^2|\mathcal{F}_n) + g(u^2\mathbb{E}(Y_{n+1}^2|\mathcal{F}_n)/2) && |g(x)| \leq x^2/2.\end{aligned}$$

Prenons l'espérance conditionnelle des deux équations et soustrayons la deuxième à la première : il ne reste alors que les termes en f et g :

$$\mathbb{E}(e^{iuY_{n+1}} - e^{-u^2\mathbb{E}(Y_{n+1}|\mathcal{F}_n)/2}|\mathcal{F}_n) = \mathbb{E}(f(uY_{n+1})|\mathcal{F}_n) + g(u^2\mathbb{E}(Y_{n+1}^2|\mathcal{F}_n)/2).$$

À partir de l'hypothèse $Y_{n+1} \leq C$ p.s., nous obtenons $\mathbb{E}(Y_{n+1}^2|\mathcal{F}_n) \leq C$ p.s. puis l'encadrement voulu en considérant les encadrements sur f, g et la croissance de l'espérance conditionnelle.

(4) Nous avons par somme téléscopique :

$$\mathbb{E}(e^{iuM_n + u^2A_n/2} - 1) = \sum_{k=0}^{n-1} \mathbb{E}(e^{iuM_{k+1}+u^2A_{k+1}/2} - e^{iuM_k+u^2A_k/2}).$$

Il s'agit alors de relier les espérances de droite à la question précédente. Nous factorisons tout d'abord

$$e^{iuM_{n+1}+u^2A_{n+1}/2} - e^{iuM_n+u^2A_n/2} = e^{iuM_n+u^2A_{n+1}/2}\left(e^{iuY_{n+1}} - e^{-u^2\mathbb{E}(Y_{n+1}|\mathcal{F}_n)/2}\right).$$

Prenons l'espérance conditionnelle sachant $\mathcal{F}_n$ puis enfin nous utilisons d'une part la question précédente et d'autre part le fait que $A_{n+1} \leq (n+1)C^2$ p.s. et nous obtenons :

$$\left|\mathbb{E}\left(e^{iuM_{n+1}+u^2A_{n+1}/2} - e^{iuM_n+u^2A_n/2}\right)\right| \leq n(u^3C^3/6 + u^4C^4/8)e^{u^2(n+1)C^2/2}.$$

(5) Prenons $u_n = u/\sigma_n$ dans l'inégalité précédente. L'hypothèse $\sigma_n^2/n \to +\infty$ implique également $n/\sigma_n^3 \to 0$ et $n/\sigma_n^4 \to 0$ donc le membre de droite de l'inégalité précédente tend vers 0.

D'autre part, $A_n/\sigma_n^2 \to 1$ (qui est une *constante*) en probabilité, alors, en prenant $u_n = 1/\sigma_n$, le lemme de Slutsky implique la convergence en loi de $e^{iuM_n/\sigma_n + A_n/\sigma_n^2 u^2/2}$ et donc nous avons convergence de la fonction caractéristique de M_n/σ_n vers $e^{-u^2/2}$. Nous reconnaissons la fonction caractéristique de la loi gaussienne et concluons que M_n/σ_n converge en loi vers une loi gaussienne (centrée réduite).

(6) Pour des variables $(X_k)_k$ i.i.d. et bornées, en posant $Y_k = X_k - \mathbb{E}(X_k)$, nous nous retrouvons dans les hypothèses de l'exercice avec $\sigma_n^2 = n\mathrm{Var}(X_1)$ et nous obtenons ainsi le théorème central limite. □