UPMC 2016-2017 Licence L3 - 3M290

Partiel du 6 mars 2017. Durée 2h.
Sans documents ni calculatrice ni portable.

Notations :

$\mathbb{N}$ désigne l'ensemble des entiers naturels.
L'ensemble $\Omega$ est muni d'une tribu $\mathcal{F}$ et d'une probabilité $\mathbb{P}$.
v.a. signifie variable aléatoire.
$\mathbb{E}(U)$ désigne l'espérance de la v.a. $U$.
$\mathbf{1}_A$ est la fonction indicatrice de l'ensemble $A$.

**Questions de Cours.**

1) Donner la définition de la fonction génératrice d'une v.a. $X : \Omega \to \mathbb{N}$.

2) On considère une v.a. $X : \Omega \to \mathbb{R}$. Donner la définition de la loi de $X$.

3) Si $X$ et $Y$ sont des v.a. à valeurs dans $\mathbb{N}$, quand dit-on qu'elles sont indépendantes ?

**Exercice 1.** On considère deux v.a. indépendantes notées $X$ et $\epsilon$. On suppose que $X$ est de loi $\mathcal{N}(0, 1)$ et $\epsilon$ est une v.a. de Bernoulli qui vérifie $\mathbb{P}(\epsilon = 1) = \mathbb{P}(\epsilon = -1) = \frac{1}{2}$. On définit $Y = \epsilon X$ (autrement dit $Y(\omega) = \epsilon(\omega)X(\omega)$ pour tout $\omega \in \Omega$).

1) Montrer que $\{Y \leq x\} = \{X \leq x \text{ et } \epsilon = 1\} \cup \{X \geq -x \text{ et } \epsilon = -1\}$ pour tout $x$ réel.
2) En utilisant la densité de $X$ montrer que $\mathbb{P}(X \geq -x) = \mathbb{P}(X \leq x)$.
3) Déduire des questions 1) et 2) la fonction de répartition de $Y$ puis sa loi.
4) Dans cette question on souhaite utiliser la formule de transfert pour identifier la loi de $Y$.
a) Montrer que $g(Y) = g(X)\,\mathbf{1}_{\{\epsilon=1\}} + g(-X)\,\mathbf{1}_{\{\epsilon=-1\}}$ pour toute fonction $g$ borélienne bornée.
b) En utilisant la densité de $X$ montrer que $\mathbb{E}(g(-X)) = \mathbb{E}(g(X))$.
c) Identifier la loi de $Y$.

**Exercice 2.** Soit $A = \mathbb{N}^* \times [0, \frac{1}{2}[$ et $\lambda$ un réel strictement positif.

1) On suppose que $X$ et $Y$ sont deux v.a indépendantes, que $X$ suit la loi de Poisson de paramètre $\lambda$ et $Y$ la loi uniforme sur $[0, 1]$.

a) Exprimer l'événement $\{\omega \in \Omega;\ (X(\omega), Y(\omega)) \in A\}$ comme l'intersection de deux événements portant séparément sur $X$ et sur $Y$.
b) Calculer $\mathbb{P}((X,Y) \in A)$ puis $\mathbb{P}((X,Y) \notin A)$.

2) $(X_k)$ et $(Y_k)$ désignent deux suites indépendantes de v.a. indépendantes. Pour tout $k \geq 1$, $X_k$ suit la loi de Poisson de paramètre $\lambda$ et $Y_k$ suit la loi uniforme sur $[0,1]$. Soit $T$ défini pour $\omega \in \Omega$ par

$$T(\omega) = \inf\{k \geq 1; (X_k(\omega), Y_k(\omega)) \in A\},$$

si $\omega$ est tel que cet ensemble est non vide, sinon on pose $T(\omega) = +\infty$. On admet que $T$ est une v.a. ( à valeurs dans $\mathbb{N}^* \cup \{+\infty\}$).

a) Calculer $\mathbb{P}(T = 1)$ et $\mathbb{P}(T > 1)$.
b) Calculer $\mathbb{P}(T > n)$ pour tout $n \geq 1$.
c) Montrer que $\mathbb{P}(T = +\infty) = 0$.

3) Déterminer la loi de T. *Indication :* on pourra déduire de b) l'expression de $\mathbb{P}(T = n)$ pour tout $n \geq 1$.

**Exercice 3.** $U$ et $V$ sont deux v.a. à valeurs dans $\mathbb{N}$ telles que $\mathbb{P}(V \leq U) = 1$ et qui vérifient $\mathbb{P}(V = k|U = n) = \frac{1}{n+1}$ pour tout couple d'entiers $(k,n)$ tels que $k \leq n$. Pour tout entier naturel $n$ on définit $p_n = \mathbb{P}(U = n)$.

1) Les v.a. $U$ et $V$ sont-elles indépendantes ?

2) Déterminer la loi de la v.a. $V$ en fonction des $p_n$.

3) a) Pour $i \in \mathbb{N}$, écrire $\{U - V = i\}$ sous la forme d'une union dénombrable d'événements portant sur $U$ et $V$.
b) En déduire que $V$ et $U - V$ ont même loi.