4M011 : Probabilités Approfondies
Partiel – 27 octobre 2016

Le sujet comporte trois exercices. Merci de rendre trois copies distinctes (même blanches, le cas échéant), portant chacune votre nom et le numéro de l'exercice correspondant.

L'épreuve dure deux heures. Aucun document ni appareil électronique n'est autorisé.

Exercice 1. Les deux questions de cet exercice sont indépendantes.

1. Soit $\alpha > 0$. Soient B et U deux variables indépendantes telles que U est uniforme sur l'intervalle $]0,1[$, et B est à valeurs positives et B^α est intégrable. On définit la variable C par
$$C = f(B,U) = 2U(B+U^2)^\alpha.$$
Justifier que C est intégrable et calculer $\mathbb{E}[C|B]$.
2. Soient X et Y deux variables aléatoires normales centrées réduites $\mathcal{N}(0,1)$ indépendantes. On pose $Z = X + 2Y$. Montrer qu'il existe un unique a tel que $X = aZ + W$ avec W indépendant de Z. En déduire l'expression de $\mathbb{E}[X|Z]$ et $\mathbb{E}[X^2|Z]$.

Exercice 2. Soit $(X_i)_{i\geqslant 1}$ une suite de variables aléatoires i.i.d. de loi $\mathbb{P}(X_1 = +1) = \mathbb{P}(X_1 = -1) = 1/2$, et soit la filtration $\mathcal{F}_0 = \{\varnothing, \Omega\}$, $\mathcal{F}_n = \sigma(X_1, \ldots, X_n)$. On fixe un entier $N \geqslant 1$, et pour $x \in \{0, \ldots, N\}$, on considère la marche aléatoire issue de x : $S_0 = x$ et pour $n \geqslant 1$, $S_n = x + \sum_{k=1}^n X_i$.

1. Montrer que S_n et $M_n = S_n^2 - n$ sont des martingales relativement à la filtration $(\mathcal{F}_n)_{n\geqslant 0}$.
2. On considère le temps $T = \inf\{n : S_n = 0 \text{ ou } S_n = N\}$. Montrer que T est un temps d'arrêt.
3. Pour $m \geqslant 0$, on introduit l'événement $A_m = \{X_{mN+1} = \cdots = X_{(m+1)N} = +1\}$. Montrer que pour $q \geqslant 1$, $\{T > qN\} \subset \bigcap_{m=0}^{q-1} A_m^c$, et en déduire une majoration de $\mathbb{P}(T > qN)$. Montrer que $\mathbb{E}[T] = \sum_{j\geqslant 0} \mathbb{P}(T > j) < +\infty$ et que $T < +\infty$ p.s.
4. Calculer $\mathbb{E}[S_T]$ et en déduire que $\mathbb{P}(S_T = 0) = 1 - x/N$.
5. Calculer $\mathbb{E}[M_T]$ et en déduire $\mathbb{E}[T]$.

Exercice 3. Soit $(X_n)_{n\geqslant 0}$ une martingale de carré intégrable. On définit

$$A_0 = 0 \text{ et, pour } n \geqslant 1,\ A_n = \sum_{k=1}^{n} \mathbb{E}\left[(X_k - X_{k-1})^2 \mid \mathcal{F}_{k-1}\right].$$

Le processus $(A_n)_{n\geqslant 0}$ est appelé *le processus croissant* associé à $(X_n)_{n\geqslant 0}$. Puisque $(A_n)_{n\geqslant 0}$ est une suite croissante, on définit A_∞ comme la limite presque sûre de A_n lorsque n tend vers l'infini. Notons que A_∞ peut prendre la valeur $+\infty$.

Les résultats (4) et (7) de cet exercice relient A_∞ au comportement asymptotique de la suite $(X_n)_{n\geqslant 0}$.

1. Montrer que $(X_n^2 - A_n)_{n\geqslant 0}$ est une martingale (par rapport à la filtration $(\mathcal{F}_n)_{n\geqslant 0}$ avec $\mathcal{F}_n = \sigma(X_1, \cdots, X_n)$ pour $n \geqslant 1$ et $\mathcal{F}_0 = \{\varnothing, \Omega\}$). Déterminer $\mathbb{P}(A_\infty = \infty)$ en supposant que $(X_n)_{n\geqslant 0}$ est bornée dans L^2.
2. Montrer que $\mathbb{E}[\sup_{m\leqslant n} X_m^2] \leqslant 4\mathbb{E}[A_n]$. En déduire que $\mathbb{E}[\sup_{m\geqslant 0} X_m^2] \leqslant 4\mathbb{E}[A_\infty]$.
3. Soit $N_a = \inf\{n \geqslant 0 \ :\ A_{n+1} > a^2\}$. Montrer que N_a est un temps d'arrêt.
4. Montrer que
$$\mathbb{E}[\sup_{m\geqslant 0} X_{m\wedge N_a}^2] \leqslant 4a^2$$
et en déduire que sur l'événement $\{A_\infty < \infty\}$, la suite $(X_n)_{n\geqslant 0}$ converge p.s.
5. Soit $f : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$ une fonction décroissante telle que $\int_0^\infty f^2(x)dx < \infty$. On définit
$$Y_0 = 0, \quad \text{et pour } n \geqslant 1,\ Y_n = \sum_{m=1}^{n} (X_m - X_{m-1}) f(A_m).$$
Montrer que $(Y_n)_{n\geqslant 0}$ est une martingale de carré intégrable et calculer $(B_n)_{n\geqslant 0}$ son processus croissant associé.
6. En utilisant la question (4), montrer que $(Y_n)_{n\geqslant 0}$ converge p.s. vers une variable aléatoire Y_∞.
Indication : on pourra utiliser, en la démontrant, l'inégalité $(y - x)f^2(y) \leqslant \int_x^y f^2(u)du$, valable pour $y > x$ et f^2 décroissante.
7. Monter que $(X_n f(A_n))_{n\geqslant 0}$ converge p.s. vers 0 sur l'événement $\{A_\infty = \infty\}$.
Indication : on admettra le lemme de Kronecker qui stipule que pour deux suites $(a_n)_{n\geqslant 0}$ et $(b_n)_{n\geqslant 0}$, si $a_n \to 0$ et si $\sum_{n\geqslant 0} a_n b_n$ converge alors $a_n \sum_{m=1}^{n} b_m$ converge vers 0.

——— Fin du sujet ———