M1 - Statistiques bayésiennes

Mini-test 3, le 27/03/2018

Durée 30mn. Les documents ne sont pas autorisés.

Question de cours

On considère $\mathcal{P} = \{P_\theta, \theta \in \Theta\}$ avec $\Theta \subset \mathbb{R}$. On munit Θ d'une loi a priori Π, on suppose $X = (X_1, \ldots, X_n) \,|\, \theta \sim P_\theta^{\otimes n}$, et l'on forme la loi a posteriori $\Pi[\cdot \,|\, X]$. On étudie ensuite la loi a posteriori sous l'hypothèse fréquentiste $X = (X_1, \ldots, X_n) \sim P_{\theta_0}^{\otimes n}$, pour $\theta_0 \in \Theta$. Quand dit-on que la loi a posteriori $\Pi[\cdot \,|\, X]$ est consistante au point θ_0 ?

Exercice 1

Soit $\mathcal{P} = \{P_\theta, \theta > 0\}$, où P_θ est la loi de Poisson de paramètre $\theta > 0$, et soit $X_1, \ldots, X_n$ des variables i.i.d. de loi P_θ, sachant θ. Pour tout $\mu > 0$, on considère la loi a priori $\Pi_\mu = \mathcal{E}(\mu)$, loi exponentielle de paramètre μ. On se propose de déterminer μ par une méthode bayésienne empirique. On rappelle que pour tous $a, b > 0$,

$$\int_0^{+\infty} x^{a-1} \mathrm{e}^{-bx} \mathrm{d}x = \frac{\Gamma(a)}{b^a} \cdot$$

1. Pour $\mu > 0$ fixé, déterminer la loi marginale de $X = (X_1, \ldots, X_n)$ lorsque la loi a priori est Π_μ.
2. En dérivant la vraisemblance marginale des observations par rapport à μ, déterminer une valeur de μ, notée $\hat{\mu}$, pour laquelle cette vraisemblance est maximale.
3. En déduire la loi a posteriori finale suggérée par la méthode bayésienne empirique.
4. Quelle est la moyenne a posteriori obtenue par cette méthode ?

Exercice 2

Pour $a \in \mathbb{R}$ et $\sigma^2 \in \mathbb{R}_+^*$ fixés (connus), on considère le modèle suivant :

$$\theta \sim \Pi = \mathcal{N}(a, \sigma^2)$$
$$X = (X_1, \ldots, X_n) \,|\, \theta \sim \mathcal{N}(\theta, 1)^{\otimes n} .$$

On considère la fonction de perte quadratique.

1. Déterminer la loi a posteriori $\Pi(\cdot \,|\, X)$.
2. Déterminer un estimateur de Bayes $\hat{\theta}(X)$ pour la perte quadratique.
3. Pour $\alpha \in]0, 1[$, on note q_α le quantile d'ordre $1 - \alpha/2$ de la loi $\mathcal{N}(0, 1)$. À l'aide de q_α, construire un intervalle de crédibilité de niveau (exactement) $1 - \alpha$, centré autour de $\hat{\theta}(X)$.
4. Montrer que pour tout $\theta \in \mathbb{R}$, le risque quadratique de $\hat{\theta}(X)$ s'écrit
$$R(\theta, \hat{\theta}(X)) = \frac{\sigma^{-4}(a - \theta)^2 + n}{(n + \sigma^{-2})^2} \cdot$$
5. Quel est le risque de Bayes $R_B(\Pi)$ pour la loi a priori Π ?
6. Quel est le risque maximal $R_{\max}(\overline{X}_n)$ de l'estimateur $\overline{X}_n$?
7. On rappelle le résultat suivant : si T est un estimateur tel que l'on peut trouver une suite $(\Pi_k)_{k \geq 1}$ de lois a priori avec
$$R_{\max}(T) \leq \limsup_{k \to +\infty} R_B(\Pi_k) ,$$
alors T est minimax.
Montrer que $\overline{X}_n$ est un estimateur minimax de θ.