Feuille d'exercices 4

1. Plus longue sous-suite croissante

Soient $X_1, \dots, X_n$ des variables indépendantes à valeurs dans $[0,1]$ et soit $L_n = L_n(X_1, \dots, X_n)$ la longeur de la plus longue sous-suite croissante, i.e.

$$L_n = \max \{k,\, \exists i_1 < \cdots < i_k,\, X_{i_1} \leq \cdots < X_{i_k}\} .$$

(1) Pour $x \in [0,1]^n$, on note $I(x)$ un ensemble d'indices qui réalise une plus longue sous-suite croissante dans x. Montrer que pour tout $y \in [0,1]^n$,

$$L_n(x) \leq L_n(y) + \sum_{i \in I(x)} \mathbb{1}_{x_i \neq y_i} .$$

(2) En déduire que pour tout $t \geq 0$,

$$\mathbf{P}\left(L_n - \mathbf{E}L_n \leq -t\right) \leq \exp\left(-\frac{t^2}{2\mathbf{E}L_n}\right) ,$$

et

$$\mathbf{P}\left(L_n - \mathbf{E}L_n \geq t\right) \leq \exp\left(-\frac{t^2}{2n}\right) .$$

(3) Pour les déviations à droite, on peut faire mieux.

(a) En utilisant l'inégalité de transport conditionnelle de Marton, montrer, grâce à l'inégalité de la question (1), que pour toute loi $Q \ll P$,

$$\mathbf{E}_Q L_n - \mathbf{E}L_n \leq \sqrt{2\mathrm{D}(Q \mid P)\mathbf{E}_Q L_n} ,$$

où P correspond à la loi de $X = (X_1, \dots, X_n)$.

(b) En déduire que

$$\mathbf{E}_Q L_n - \mathbf{E}L_n \leq \sqrt{2\mathrm{D}(Q \mid P)\mathbf{E}L_n} + 2\mathrm{D}(Q \mid P) .$$

Pour cela, on pourra d'abord montrer que pour $x, y, a > 0$, si $y - a\sqrt{y} \leq x$ alors $y \leq x + a\sqrt{x} + a^2$.

(c) En utilisant les mêmes arguments que dans la preuve du Lemme de transport, montrer que cette inégalité implique que pour tout $\lambda \in [0, 1/2[$,

$$\log \mathbf{E} e^{\lambda(L_n - \mathbf{E}L_n)} \leq \frac{\lambda^2 \mathbf{E}Z}{1 - 2\lambda} ,$$

et donc que pour tout $t \geq 0$,

$$\mathbf{P}\left(L_n - \mathbf{E}L_n \geq t\right) \leq \exp\left(-\frac{t^2}{2(2\mathbf{E}L_n + 2t)}\right) .$$