Feuille d'exercices 2

1. Variables sous-Gamma

Soit Z une variable sous-Gamma avec facteur variance $v > 0$ et facteur d'échelle $c > 0$, i.e. pour tout $\lambda \in [0, 1/c[$,

$$\log \mathbf{E} e^{\lambda(Z - \mathbf{E}Z)} \leq \frac{v\lambda^2}{2(1 - c\lambda)} \cdot$$

(1) Montrer que $\sup_{\lambda \in [0,1/c[} \left\{ \lambda t - \frac{v\lambda^2}{2(1-c\lambda)} \right\}$ est atteint en

$$\lambda_t = \frac{1}{c}\left(1 - \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{2ct}{v}}}\right) .$$

(2) Montrer que

$$t\lambda_t - \frac{v\lambda_t^2}{2(1 - c\lambda_t)} = \frac{v}{c^2} g\left(\frac{ct}{v}\right) ,$$

avec pour tout $x \geq 0$, $g(x) = 1 + x - \sqrt{1 + 2x}$.

(3) Montrer que pour tout $x \geq 0$,

$$g(x) \geq \frac{x^2}{2(1 + x)} \cdot$$

(4) En déduire que pour tout $t \geq 0$,

$$\mathbf{P}\left(Z - \mathbf{E}Z \geq t\right) \leq \exp\left\{ -\frac{t^2}{2(v + ct)} \right\} .$$

2. Maximum de variables aléatoires

(1) Soit $X_1, \ldots, X_n$ des variables aléatoires centrées et sous-gaussiennes avec facteur variance $v > 0$, i.e. pour tout $i \in [\![1, n]\!]$, et pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$,

$$\log \mathbf{E} e^{\lambda} X_i \leq \frac{\lambda^2 v}{2} \cdot$$

(a) en utilisant l'inégalité de Jensen, montrer que pour tout $\lambda \geq 0$,

$$e^{\lambda \mathbf{E}\left[\max_{1 \leq i \leq n} X_i\right]} \leq n e^{\frac{\lambda^2 v}{2}} .$$

(b) En déduire que

$$\mathbf{E}\left[\max_{1 \leq i \leq n} X_i\right] \leq \sqrt{2v \log n} .$$

(2) Soient $X_1, \ldots, X_n$ des variables i.i.d. de loi exponentielle $\mathcal{E}(\theta)$, $\theta > 0$. Montrer que

$$\mathbf{E}\left[\max_{1 \leq i \leq n} X_i\right] \underset{n \to \infty}{\sim} \frac{\log(n)}{\theta} \cdot$$

(3) Soient $X_1, \ldots, X_n$ des variables i.i.d. de loi de Poisson $\mathcal{P}(1)$.

(a) En utilisant la même astuce que pour la question (1)(a), montrer que

$$\mathbf{E}\left[\max_{1 \leq i \leq n} X_i\right] \leq \frac{2 \log n}{\log \log n} \cdot$$

(b) En utilisant l'inégalité de Markov, montrer que pour tout $a \in \mathbb{N}^*$, on a

$$\mathbf{E}\left[\max_{1 \leq i \leq n} X_i\right] \geq a\left(1 - \left(1 - \mathbf{P}(X_1 = a)\right)^n\right) ,$$

et en déduire que

$$\mathbf{E}\left[\max_{1 \leq i \leq n} X_i\right] \geq \left(1 - e^{-e^{-1}}\right) \left\lfloor \frac{\log n}{\log \log n} \right\rfloor .$$

3. Plus grande valeur propre d'un graphe aléatoire
Soit $G \sim \mathcal{G}(n,p)$ un graphe aléatoire d'Erdös–Renyi, et notons A sa matrice d'adjacence (i.e. $A_{i,j} = 1$ ssi il y a une arête entre i et j). Soit $\lambda_1(A)$ la plus grande valeur propre de A :

$$\lambda_1(A) = \sup_{u, \|u\|=1} {}^t u A u \,.$$

(1) Montrer que $\mathbf{E}\lambda_1(A) \geq (n-1)p$.

(2) Soit $A^{(i,j)}$ la matrice d'adjacence du graphe obtenu en rejouant l'arête $\{i,j\}$. On remarque que si v est tel que $\|v\| = 1$ et $\lambda_1(A) = {}^t vAv$, alors

$$\left(\lambda_1(A) - \lambda_1(A^{(i,j)})\right)_+ \leq \left({}^t vAv - {}^t vA^{(i,j)}v\right) \mathbb{1}_{\lambda_1(A) \geq \lambda_1(A^{(i,j)})} \,.$$

En utilisant cette inégalité montrer que

$$\left(\lambda_1(A) - \lambda_1(A^{(i,j)})\right)_+ \leq 2|v_i v_j| \,.$$

(3) En utilisant l'inégalité d'Efron–Stein, montrer que

$$\mathbf{Var}(\lambda_1(A)) \leq 4 \,.$$