TD9. Convergences p.s., en probabilité, et dans $\mathscr{L}^p$

1. Déterminer pour chacune des convergences suivantes à quelle condition sur la suite $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ elle a lieu.

a. La suite $(\mathbb{1}_{A_n})_{n\in\mathbb{N}}$ converge en probabilité vers 0.

b. La suite $(\mathbb{1}_{A_n})_{n\in\mathbb{N}}$ converge dans $\mathscr{L}^2$ vers 0.

c. La suite $(\mathbb{1}_{A_n})_{n\in\mathbb{N}}$ converge presque sûrement vers 0.

Solution de l'exercice 1. a. Supposons que $\mathbb{1}_{A_n}$ converge vers 0 en probabilité. Alors en particulier, $P(\mathbb{1}_{A_n} > \frac{1}{2}) = P(A_n)$ tend vers 0. Réciproquement, si $P(A_n)$ converge vers 0, alors pour tout $\varepsilon > 0$, $P(\mathbb{1}_{A_n} > \varepsilon) \le P(A_n)$ converge vers 0.

Finalement la condition est $\lim_{n\to\infty} P(A_n) = 0$.

b. On a $E[\mathbb{1}_{A_n}] = P(A_n)$. La condition est donc $\lim_{n\to\infty} P(A_n) = 0$.

c. Soit $\omega \in \Omega$. La suite $(\mathbb{1}_{A_n}(\omega))_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers 0 si et seulement si elle est stationnaire, égale à 0 à partir d'un certain rang. Ceci a lieu si et seulement si ω appartient à $\liminf A_n^c$, qui est le complémentaire de $\limsup A_n$. Ainsi, la convergence a lieu presque sûrement si et seulement si $P(\overline{A}) = 0$, où $\overline{A} := \limsup_{n\to\infty} A_n$.

2. Soit $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de variables aléatoires indépendantes telle que pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$P(X_n = -1) = 1 - \frac{1}{(n+1)^2} \text{ et } P(X_n = n^2 - 1) = \frac{1}{(n+1)^2}.$$

a. Montrer que la suite $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers -1 en probabilité.

b. Montrer que la suite $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge presque sûrement vers -1. Cette convergence a-t-elle lieu dans $\mathscr{L}^1$?

Solution de l'exercice 2. a. Soit $\varepsilon > 0$ un réel. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $P(|X_n + 1| > \varepsilon) \le \frac{1}{(n+1)^2}$, donc

$$\lim_{n\to\infty} P(|X_n + 1| > \varepsilon) = 0.$$

Puisque ceci a lieu pour tout $\varepsilon > 0$, la suite $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge en probabilité vers -1.

b. On a, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $P(X_n \neq -1) = \frac{1}{(n+1)^2}$, donc

$$\sum_{n\in\mathbb{N}} P(X_n \neq -1) < +\infty.$$

D'après le lemme de Borel–Cantelli, ceci entraîne qu'avec probabilité 1, il n'y a qu'un nombre fini de valeurs de n pour lesquelles X_n n'est pas égal à -1. Autrement dit, avec probabilité 1, X_n est égal à -1 pour n assez grand. En particulier, avec probabilité 1, la suite $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers -1.

La suite $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge donc presque sûrement vers -1.

Si l'on avait convergence dans $\mathscr{L}^1$ de la suite $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ vers -1, on aurait en particulier $\lim_{n\to\infty} E[X_n] = E[-1] = -1$. Or, pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a

$$E[X_n] = -1(1 - \frac{1}{(n+1)^2}) + (n^2 - 1)\frac{1}{(n+1)^2} = -1 + \frac{n^2}{(n+1)^2},$$

qui converge vers 0 ; la convergence n'a donc pas lieu dans $\mathscr{L}^1$.

3. Soit $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de variables aléatoires indépendantes et toutes de carré intégrable.

a. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$ et tout $a \in \mathbb{R}$, on a

$$E[(X_n - a)^2] = (E[X_n] - a)^2 + \mathrm{Var}(X_n).$$

b. En déduire que la suite $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge en moyenne quadratique vers une constante a si et seulement si on a les convergences

$$\lim_{n\to\infty} E[X_n] = a \text{ et } \lim_{n\to\infty} \mathrm{Var}(X_n) = 0.$$

Solution de l'exercice 3. a. On a

$$\begin{aligned} E[(X_n - a)^2] &= E[((X_n - E[X_n]) + (E[X_n] - a))^2] \\ &= \mathrm{Var}(X_n) + 2E[(X_n - E[X_n])(E[X_n] - a)] + (E[X_n] - a))^2. \end{aligned}$$

En sortant la constante $(E[X_n] - a)$ de l'espérance du deuxième terme du membre de droite, on constate que celui-ci est nul, d'où le résultat.

b. Supposons d'abord que $E[(X_n - a)^2] \to 0$ lorsque $n \to \infty$. D'après la question précédente, $E[(X_n - a)^2] = (E[X_n] - a)^2 + \mathrm{Var}(X_n)$, les deux termes sont positifs donc tendent aussi vers 0 quand $n \to \infty$.

Réciproquement, supposons que

$$\lim_{n\to\infty} E[X_n] = a \text{ et } \lim_{n\to\infty} \mathrm{Var}(X_n) = 0.$$

On conclut grâce à l'égalité démontrée au a., en remarquant que les deux termes du membre de droite tendent vers 0.

4. Soit $(\theta_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de réels strictement positifs telle que $\lim_{n\to\infty}\theta_n = \infty$. Soit $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de variables aléatoires indépendantes telle que pour tout $n \in \mathbb{N}$, X_n suive la loi exponentielle de paramètre θ_n.

a. Étudier la convergence en probabilités de la suite $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$. Quelle hypothèse n'a-t-on pas utilisée ?

b. Reprendre la question précédente avec la convergence dans $\mathscr{L}^1$.

c. Étudier, dans le cas où $\theta_n = n$ puis dans le cas où $\theta_n = \ln n$ (pour $n \geq 2$), la convergence presque sûre de la suite $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

Solution de l'exercice 4. a. On devine que la suite $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tend vers 0 en probabilité. Par exemple, on peut observer que l'espérance et la variance de X_n, qui valent toutes deux $\frac{1}{\theta_n}$, convergent vers 0. On sait que cela implique que la suite $(X_n)_{n\geq 0}$ converge dans $\mathscr{L}^2$ vers 0, et donc en probabilité.

Démontrons néanmoins directement la convergence. Soit $\varepsilon > 0$. On a

$$P(X_n > \varepsilon) = \int_\varepsilon^{+\infty} \theta_n e^{-\theta_n x}\, dx = e^{-\theta_n \varepsilon}.$$

Puisque la suite $(\theta_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tend vers $+\infty$, la suite $(e^{-\theta_n\varepsilon})_{n\in\mathbb{N}}$ tend vers 0, et ce quel que soit ε. Ceci montre qu'on a la convergence

$$\lim_{n\to\infty} X_n \overset{P}{=} 0.$$

On ne s'est pas servi de l'hypothèse d'indépendance.

b. Puisque la suite $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers 0 en probabilité, sa seule limite possible dans $\mathscr{L}^1$ est 0. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a

$$E[|X_n - 0|] = E[|X_n|] = E[X_n] = \frac{1}{\theta_n},$$

qui tend vers 0 lorsque n tend vers l'infini. Ceci montre qu'on a la convergence

$$\lim_{n\to\infty} X_n \overset{\mathscr{L}^1}{=} 0.$$

On ne s'est toujours pas servi de l'hypothèse d'indépendance.

c. Comme à la question précédente, la seule limite presque sûre possible pour la suite $(X_n)_{n\geq 0}$ est 0. La question est donc de déterminer si l'événement

$$\bigcap_{k\geq 1}\bigcup_{N\geq 1}\bigcap_{n\geq N}\left\{|X_n| \leq \frac{1}{k}\right\},$$

qui est l'événement où la suite converge vers 0, est de probabilité 1 ou non. Pour que cet événement soit de probabilité 1, il faut (et il suffit) que pour tout $k \geq 1$, l'événement

$$\bigcup_{N \geq 1} \bigcap_{n \geq N} \left\{ |X_n| \leq \frac{1}{k} \right\}$$

soit de probabilité 1, ce qui équivaut à ce que l'événement complémentaire

$$\bigcap_{N \geq 1} \bigcup_{n \geq N} \left\{ |X_n| > \frac{1}{k} \right\}$$

soit de probabilité nulle. Ce dernier événement se présente comme la limite supérieure d'une suite d'événements, en l'occurence la suite $\left(\left\{|X_n| > \frac{1}{k}\right\}\right)_{n \in \mathbb{N}}$.

Considérons la cas $\theta_n = n$. Nous avons

$$P\left(\left\{|X_n| > \frac{1}{k}\right\}\right) = e^{-\frac{n}{k}} = (e^{-\frac{1}{k}})^n,$$

si bien que pour tout $k \geq 1$, la série

$$\sum_{n \in \mathbb{N}} P\left(\left\{|X_n| > \frac{1}{k}\right\}\right),$$

qui est une série géométrique de raison strictement inférieure à 1, converge. Le lemme de Borel–Cantelli nous permet d'en déduire que

$$P\left(\limsup \left\{|X_n| > \frac{1}{k}\right\}\right) = P\left(\bigcap_{N \geq 1} \bigcup_{n \geq N} \left\{|X_n| > \frac{1}{k}\right\}\right) = 0.$$

Nous avons déjà dit pourquoi ceci entraînait la convergence presque sûre de la suite. Dans ce cas, nous avons donc

$$\lim_{n \to \infty} X_n \overset{p.s.}{=} 0.$$

Nous ne nous sommes toujours pas servi de l'hypothèse d'indépendance.

Nous allons enfin nous en servir dans le cas $\theta_n = \ln n$. En effet, dans ce cas,

$$P\left(\left\{|X_n| > \frac{1}{k}\right\}\right) = e^{-\frac{\ln n}{k}} = \frac{1}{n^{\frac{1}{k}}}.$$

Pour $k = 1$ par exemple, nous en déduisons

$$\sum_{n \in \mathbb{N}} P\left(\left\{|X_n| > \frac{1}{k}\right\}\right) = +\infty$$

et donc, par la deuxième assertion du lemme de Borel–Cantelli,

$$P\left(\limsup\left\{|X_n|>1\right\}\right)=P\left(\bigcap_{N\geq 1}\bigcup_{n\geq N}\left\{|X_n|>1\right\}\right)=1.$$

Ainsi, avec probabilité 1, la suite $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ prend une infinité de fois des valeurs supérieures à 1. Ce comportement est incompatible avec la convergence vers 0, aussi, la probabilité qu'elle converge vers 0 est nulle. Nous avons déjà dit que la seule limite presque sûre possible pour la suite $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ était la variable nulle, car c'est sa limite en probabilité.

Dans le cas où $\theta_n=\ln n$, nous en déduisons que la suite $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ n'a pas de limite presque sûre.

5. Soit $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de variables aléatoires de loi exponentielle de paramètre 1.

a. Montrer que $P\left(\limsup\limits_{n\to\infty}\dfrac{X_n}{\ln n}>1\right)=0$.

On suppose désormais $X_1,X_2,\ldots$ indépendantes.

b. Montrer que $P\left(\limsup\limits_{n\to\infty}\dfrac{X_n}{\ln n}<1\right)=0$. Montrer que ce résultat peut être faux sans l'hypothèse d'indépendance.

c. Montrer que $\limsup_{n\to\infty}\frac{X_n}{\ln n}$ est presque sûrement égale à une constante que l'on déterminera.

d. Montrer que $\liminf_{n\to\infty}X_n$ est presque sûrement égale à 0.

Solution de l'exercice 5. a. D'après l'exercice **??**, on a

$$\begin{aligned}\left\{\limsup_{n\to\infty}\frac{X_n}{\ln n}>1\right\}&=\bigcup_{k\geq 1}\left\{\frac{X_n}{\ln n}>1+\frac{1}{k}\text{ infiniment souvent }\right\}\\&=\bigcup_{k\geq 1}\limsup_{n\to\infty}\left\{\frac{X_n}{\ln n}>1+\frac{1}{k}\right\}.\end{aligned}$$

Pour tous $n,k\geq 1$, on a, puisque X_n suit la loi exponentielle de paramètre 1,

$$P\left(\frac{X_n}{\ln n}>1+\frac{1}{k}\right)=P\left(X_n>\ln\left(n^{1+\frac{1}{k}}\right)\right)=e^{-\ln\left(n^{1+\frac{1}{k}}\right)}=\frac{1}{n^{1+\frac{1}{k}}}.$$

Pour tout $k\geq 1$, ce nombre est, en fonction de n, le terme général d'une série convergente, donc

$$\sum_{n\in\mathbb{N}}P\left(\frac{X_n}{\ln n}>1+\frac{1}{k}\right)<+\infty.$$

Le lemme de Borel–Cantelli assure donc que

$$P\left(\limsup_{n\to\infty}\left\{\frac{X_n}{\ln n} > 1+\frac{1}{k}\right\}\right) = 0.$$

Puisqu'une union dénombrable d'événements de probabilité nulle est encore de probabilité nulle, on en déduit

$$P\left(\limsup_{n\to\infty}\frac{X_n}{\ln n} > 1\right) = 0.$$

b. D'après l'exercice **??** encore,

$$\begin{aligned}\left\{\limsup_{n\to\infty}\frac{X_n}{\ln n} < 1\right\} &= \bigcup_{k\geq 1}\left\{\frac{X_n}{\ln n} < 1-\frac{1}{k} \text{ pour } n \text{ assez grand}\right\}\\ &= \bigcup_{k\geq 1}\liminf_{n\to\infty}\left\{\frac{X_n}{\ln n} < 1-\frac{1}{k}\right\}\\ &= \bigcup_{k\geq 1}\left(\limsup_{n\to\infty}\left\{\frac{X_n}{\ln n} \geq 1-\frac{1}{k}\right\}\right)^c.\end{aligned}$$

Pour tous n, $k \geq 1$, on a, d'après le même calcul que précédemment,

$$P\left(\frac{X_n}{\ln n} \geq 1-\frac{1}{k}\right) = \frac{1}{n^{1-\frac{1}{k}}},$$

si bien que

$$\sum_{n\in\mathbb{N}} P\left(\frac{X_n}{\ln n} \geq 1-\frac{1}{k}\right) = +\infty.$$

Puisque les variables aléatoires $X_1, X_2, \ldots$ sont indépendantes, la deuxième partie du lemme de Borel–Cantelli entraîne

$$P\left(\limsup_{n\to\infty}\left\{\frac{X_n}{\ln n} \geq 1-\frac{1}{k}\right\}\right) = 1,$$

d'où il découle que

$$P\left(\limsup_{n\to\infty}\frac{X_n}{\ln n} < 1\right) = 0.$$

Si on avait par exemple $X_n = X_1$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, auquel cas l'hypothèse d'indépendance serait mise en défaut, on aurait $\frac{X_n}{\ln n} = \frac{X_1}{\ln n}$ qui tendrait vers 0 presque sûrement. En particulier, on aurait $\limsup \frac{X_n}{\ln n} = 0$ presque sûrement.

c. Puisque $P(\limsup_{n\to\infty}\frac{X_n}{\ln n} < 1) + P(\limsup_{n\to\infty}\frac{X_n}{\ln n} > 1) + P(\limsup_{n\to\infty}\frac{X_n}{\ln n} = 1) = 1$, il découle des résultats précédents que $\limsup \frac{X_n}{\ln n}$ est presque sûrement égale à 1.

d. Soit (a_n) une suite de réels. D'après la deuxième partie du lemme de Borel–Cantelli, il suffit, pour qu'on ait $X_n < a_n$ infiniment souvent, d'avoir $\sum_{n\in\mathbb{N}} P(X_n < a_n) = +\infty$.

Or, pour a voisin de 0, on a $P(X < a) = 1 - e^{-a} = a + O(a^2)$. Il suffit donc d'avoir $\sum_{n\in\mathbb{N}} a_n = +\infty$. On peut donc prendre $a_n = \frac{1}{n}$.

L'événement $\{X_n \leq \frac{1}{n}$ infiniment souvent$\}$ est donc de probabilité 1. Sur cet événement, $\liminf_{n\to\infty} X_n = 0$, donc $\liminf_{n\to\infty} X_n = 0$ presque sûrement.

Ici encore, si on avait par exemple $X_n = X_1$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, on aurait $\liminf_{n\to\infty} X_n = X_1$ presque sûrement, qui n'est pas la variable aléatoire nulle.

6. Montrer que $X_n \to X$ en probabilité si et seulement si pour toute sous-suite $(X_{\varphi(n)})$, il existe une sous-sous-suite $(X_{\psi(\varphi(n))})$ qui converge vers X p.s.

[Notation : Comme dans le cours, $\varphi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ et $\psi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ sont des fonctions strictement croissantes qui *ne dépendent pas* de ω.]

Solution de l'exercice 6. "$\Rightarrow$" Si $X_n \to X$ en probabilité, alors $X_{\varphi(n)} \to X$ en probabilité. Un résultat du cours nous dit que l'on peut en extraire une sous-sous-suite $(X_{\psi(\varphi(n))})$ qui converge vers X p.s.

"$\Leftarrow$" Soit $\varepsilon > 0$. Soit $a_n := P(|X_n - X| > \varepsilon)$. Par hypothèse, pour toute suite $(a_{\varphi(n)})$, il existe une sous-sous-suite $(a_{\psi(\varphi(n))})$ qui tend vers 0. Ceci équivaut à dire que $a_n \to 0$. [En effet, si (a_n) ne convergeait pas vers 0, il existerait une sous-suite $(a_{p(n)})$ tendant vers une limite $a \neq 0$. Pour cette sous-suite, il serait impossible d'en extraire une sous-sous-suite qui converge vers 0, contredisant ainsi l'hypothèse.] Ainsi, $P(|X_n - X| > \varepsilon) \to 0$ pour tout $\varepsilon > 0$. Autrement dit, $X_n \to X$ en probabilité.