TD8. Vecteurs aléatoires

1. On note N la variable aléatoire comptant le nombre d'oeufs qu'un insecte donné pond. On suppose que N suit une loi de Poisson de paramètre $\lambda \in \mathbb{R}^+$. On suppose également que chaque oeuf donne naissance à un nouvel insecte avec probabilité p, indépendamment de l'éclosion des autres oeufs. On considère alors une famille $(X_i)_{i\geq 1}$ de variables aléatoires de loi de Bernoulli de paramètre $p \in [0, 1]$. On suppose que les variables aléatoires N, X_1, X_2, ... sont indépendantes et on note D le nombre de descendants de l'insecte.

a) Ecrire D en fonction des variables aléatoires N et X_i.

b) Pour tout $(n, d) \in \mathbb{N}^2$, calculer $\mathbb{P}(D = d \mid N = n)$.

c) En déduire la loi de D et la loi du vecteur aléatoire $Z = (D,\ N)$.

d) Retrouver la loi de D en calculant la fonction génératrice.

Solution de l'exercice 1.

a) On a $D = \sum_{i=1}^{N} X_i$ (l'indice de la somme est lui même aléatoire)

b) On a :

$$\mathbb{P}[D = d|N = n] = \mathbb{P}\Big[\sum_{i=1}^{N} X_i = d|N = n\Big] = \mathbb{P}\Big[\sum_{i=1}^{n} X_i = d|N = n\Big] = \mathbb{P}\Big[\sum_{i=1}^{n} X_i = d\Big],$$

par indépendance de $(N, X_1, X_2, \dots)$.
La variable aléatoire $\sum_{i=1}^{n} X_i$ somme de n Bernoullis indépendantes de paramètre p, suit une loi binomiale de paramètres n et p, d'où

$$\mathbb{P}[D = d|N = n] = \binom{n}{d} p^d (1-p)^{n-d},$$

pour $d \leq n$, et on a bien sûr $\mathbb{P}(D = d|N = n) = 0$ si $d > n$ (le nombre de descendants ne peut être supérieur au nombre d'œufs).

c) La variable aléatoire $Z = (D, N)$ est à valeurs de $\mathbb{N}^2$. Sa loi est donnée par les valeurs des probabilités $\mathbb{P}\left[\{D = d\} \cap \{N = n\}\right]$, $d \leq n$. On a :

$$\begin{aligned}\mathbb{P}[\{D = d\} \cap \{N = n\}] &= \mathbb{P}\left[D = d|N = n\right] \mathbb{P}[N = n] \\ &= e^{-\lambda}\frac{\lambda^n}{n!}\binom{n}{d} p^d (1-p)^{n-d} \mathbb{1}_{\{d\leq n\}}.\end{aligned}$$

Pour obtenir la loi de D, on écrit avec la formule des probabilités totales :

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}[D=d] &= \sum_{n\geq 0}\mathbb{P}[\{D=d\}\cap\{N=n\}] = \sum_{n\geq d} e^{-\lambda}\frac{\lambda^n}{n!}\binom{n}{d}p^d(1-p)^{n-d} \\
&= \frac{(\lambda p)^d}{d!}e^{-\lambda}\sum_{n\geq d}\frac{\lambda^{n-d}(1-p)^{n-d}}{(n-d)!} = e^{-p\lambda}\frac{(p\lambda)^d}{d!}
\end{aligned}$$

On reconnaît la loi de Poisson de paramètre $p\lambda$.

d) On peut retrouver ce résultat en utilisant une fonction génératrice. On se rappelle que la fonction génératrice d'une loi de Bernoulli de paramètre p est $1-p+ps$ et celle d'une loi de Poisson de paramètre μ est $e^{\mu(s-1)}$. On écrit :

$$\begin{aligned}
G_D(s) &= \mathbb{E}\left[s^D\right] = \mathbb{E}\left[s^{\sum_{i=1}^N X_i}\right] = \mathbb{E}\left[\sum_{n=0}^{\infty} s^{\sum_{i=1}^N X_i}\mathbb{1}_{(N=n)}\right] \\
&\underset{(*)}{=} \sum_{n=0}^{\infty}\mathbb{E}\left[s^{\sum_{i=1}^n X_i}\mathbb{1}_{(N=n)}\right] = \sum_{n=0}^{\infty}\mathbb{E}\left[s^{\sum_{i=1}^n X_i}\right]\mathbb{E}\left[\mathbb{1}_{(N=n)}\right] \\
&= \sum_{n=0}^{\infty}\prod_{i=1}^{n}\mathbb{E}\left[s^{X_i}\right]\mathbb{P}(N=n) = \sum_{n=0}^{\infty}(1-p+ps)^n\frac{\lambda^n}{n!}e^{-\lambda} \\
&= e^{p\lambda(s-1)}
\end{aligned}$$

On reconnait la fonction génératrice d'une loi de Poisson de paramètre $p\lambda$, et comme la fonction génératrice caractérise la loi, D suit $\mathcal{P}(p\lambda)$. Les arguments utilisés dans le calcul ci-dessus sont l'indépendance des variables aléatoires (qui induit la multiplication des espérances), le fait que l'espérance de l'indicatrice d'un événement soit la probabilité de celui-ci, et une interversion série/espérance en (*) justifiée par le théorème de convergence monotone (les variables aléatoires qui interviennent dans la série sont positives).

2. Soit $X := (X_1, \dots X_n)$ un vecteur aléatoire admettant la densité f. Montrer que pour tout $1 \leq i \leq n$, X_i a une densité.

Solution de l'exercice 2. Soit $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction positive. Considérons la fonction $g : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ définie par $g(x_1, \dots, x_n) := h(x_1)$ qui est une fonction positive. D'après la formule de transfert donnée dans le cours,

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}[h(X_1)] &= \mathbb{E}[g(X_1,\dots,X_n)] = \int_{\mathbb{R}^n} g(x_1,\dots,x_n)f(x_1,\dots,x_n)dx_1\dots dx_n \\
&= \int_{\mathbb{R}^n} h(x_1)f(x_1,\dots,x_n)dx_1\dots dx_n.
\end{aligned}$$

Par le théorème de Fubini–Tonelli, cela donne :

$$\mathbb{E}[h(X_1)] = \int_{\mathbb{R}} h(x_1) f_1(x_1) dx_1,$$

où

$$f_1(x_1) := \int_{\mathbb{R}^{n-1}} f(x_1, \ldots, x_n) dx_2 \ldots dx_n, \qquad x_1 \in \mathbb{R}.$$

De nouveau par la formule de transfert, on déduit que X_1 a une densité, et sa densité est f_1.

Le même argument montre que pour tout i, X_i a une densité qui s'écrit d'une forme semblable à celle de f_1.

3. Soit (X, Y) un vecteur aléatoire sur $\mathbb{R}^2$ dont la loi admet la densité

$$f(x, y) = \frac{1}{2\pi} e^{-\frac{x^2+y^2}{2}}.$$

Déterminer les lois de X, Y, $X + Y$, $X - Y$, $X^2 + Y^2$.

Solution de l'exercice 3. La loi de X est absolument continue par rapport à la mesure de Lebesgue et admet la densité

$$f_1(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x, y)\, dy = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}.$$

La loi de X est donc la loi gaussienne $\mathcal{N}(0,\, 1)$. La loi de Y est égale à celle de X.

Pour calculer la loi de $X + Y$, considérons une fonction $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continue positive. Calculons $\mathbb{E}[g(X + Y)]$:

$$\mathbb{E}[g(X + Y)] = \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}^2} g(x + y) e^{-\frac{x^2+y^2}{2}}\, dxdy.$$

Faisons le changement de variable $(u, v) = (x+y, x-y)$, c'est-à -dire $(x, y) = \frac{1}{2}(u+v, u-v)$. Le jacobien $\frac{D(x,y)}{D(u,v)}$ est donné par

$$\det \begin{pmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} \end{pmatrix} = \frac{1}{4} \det \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} = -\frac{1}{2}.$$

On a $x^2 + y^2 = \frac{1}{2}(u^2 + v^2)$, donc

$$\mathbb{E}[g(X + Y)] = \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}^2} g(u) e^{-\frac{u^2+v^2}{4}} \left| \frac{D(x, y)}{D(u, v)} \right| dudv = \frac{1}{4\pi} \int_{\mathbb{R}^2} g(u) e^{-\frac{u^2+v^2}{4}}\, dudv.$$

On peut intégrer par rapport à v en utilisant la relation $\int_{\mathbb{R}} e^{-\frac{v^2}{4}}\, dv = 2\sqrt{\pi}$, et on trouve

$$\mathbb{E}[g(X+Y)] = \frac{1}{2\sqrt{\pi}} \int_{\mathbb{R}} g(u) e^{-\frac{u^2}{4}}\, du,$$

donc $X+Y$ suit la loi normale centrée de variance 2 : $P_{X+Y} = \mathscr{N}(0,\, 2)$. On observe qu'on a également $P_{X-Y} = \mathscr{N}(0,\, 2)$.

Déterminons enfin la loi de X^2+Y^2. On procède de la même manière que pour déterminer la loi de $X+Y$. On fait cependant un autre changement de variables : on passe en coordonnée polaires, écrivant $(x,y) = (r\cos\theta, r\sin\theta)$. L'application qui à (r,θ) associe (x,y) est un C^1-difféomorphisme de $\mathbb{R}_+^* \times [0, 2\pi[$ dans $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$, dont le jacobien vaut

$$\left|\frac{D(x,y)}{D(r,\theta)}\right| = \left|\det\begin{pmatrix} \frac{\partial x}{\partial r} & \frac{\partial x}{\partial \theta} \\ \frac{\partial y}{\partial r} & \frac{\partial y}{\partial \theta} \end{pmatrix}\right| = \left|\det\begin{pmatrix} \cos\theta & -r\sin\theta \\ \sin\theta & r\cos\theta \end{pmatrix}\right| = r.$$

Ainsi,

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}[g(X^2+Y^2)] &= \frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{R}^2} g(x^2+y^2) e^{-\frac{x^2+y^2}{2}}\, dxdy \\
&= \frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{R}_+^*} dr \int_0^{2\pi} d\theta g(r^2) r e^{-\frac{r^2}{2}} \\
&= \int_0^{+\infty} g(r^2) e^{-\frac{r^2}{2}}\, rdr \\
&= \frac{1}{2}\int_0^{+\infty} g(t) e^{-\frac{t}{2}}\, dt,
\end{aligned}$$

où nous sommes passés de l'avant-dernière ligne à la dernière en faisant le changement de variable $t = r^2$. On reconnaît la densité de la loi exponentielle de paramètre $\frac{1}{2}$. Ainsi, X^2+Y^2 suit la loi exponentielle de paramètre $\frac{1}{2}$ (ce que l'on a vu dans un exercice de la feuille TD précédente).

4. Soit (X,Y) un vecteur aléatoire de densité $f(x,y) = \mathbb{1}_{[0,1]^2}(x,y)$. Déterminer les lois de X, Y et $Z = XY$.

Solution de l'exercice 4. Puisque le vecteur aléatoire (X,Y) admet une densité, chacune des variables X et Y admettent une densité, qu'on peut calculer respectivement par les formules $f_1(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x,y)\, dy$ et $f_2(y) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x,y)\, dx$. On trouve

$$f_1(x) = \int_{-\infty}^{\infty} \mathbb{1}_{[0,1]^2}(x,y) dy = \int_{-\infty}^{\infty} \mathbb{1}_{[0,1]}(x)\mathbb{1}_{[0,1]}(y) dy = \mathbb{1}_{[0,1]}(x)\int_0^1 dy = \mathbb{1}_{[0,1]}(x).$$

Ainsi, X suit la loi uniforme sur l'intervalle $[0,1]$. Le même calcul en échangeant x et y montre que Y suit également la loi uniforme sur l'intervalle $[0,1]$.

Pour calculer la loi de Z, considérons une fonction mesurable positive $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ et calculons, grâce au théorème de transfert, l'espérance de $g(Z)$. On a

$$\mathbb{E}[g(Z)] = \mathbb{E}[g(XY)] = \int_{\mathbb{R}^2} g(xy) f(x,y)\, dxdy = \int_{[0,1]^2} g(xy)\, dxdy.$$

Pour calculer cette intégrale, on effectue un changement de variables. On pose $t = xy$ et on cherche une autre variable u qui dépende de x et de y et telle que l'application $(x,y) \mapsto (t(x,y), u(x,y))$ soit bijective, de classe C^1 et admette une réciproque de classe C^1. Posons $u(x,y) = x$. On peut retrouver x et y à partir de t et u puisque $x = u$ et $y = \frac{t}{u}$. Notons que nous devons nous restreindre à $(x,y) \in]0,1] \times [0,1]$ pour assurer que u ne soit pas nul, mais cela nous suffit puisque c'est, à un ensemble négligeable près, le domaine sur lequel nous intégrons.

Déterminons le domaine dans lequel (t,u) varie lorsque (x,y) décrit $]0,1[^2$ (considérer ce domaine encore un peu plus petit ne change rien à l'intégrale et simplifie le calcul du domaine de (t,u)). On a $u = x \in]0,1[$ et $t = xy \in]0,x[=]0,u[$. Ainsi, $(t,u) \in D = \{(a,b) \in]0,1[^2 \colon a < b\}$. De plus, pour tout (t,u) dans le domaine D, le couple $(x(t,u), y(t,u)) = (u, \frac{t}{u})$ appartient à $]0,1[^2$.

Calculons, pour tout $(t,u) \in D$, le jacobien de la transformation $(t,u) \mapsto (x(t,u), y(t,u))$. Il vaut

$$\frac{D(x,y)}{D(t,u)} = \det \begin{pmatrix} \frac{\partial x}{\partial t} & \frac{\partial x}{\partial u} \\ \frac{\partial y}{\partial t} & \frac{\partial y}{\partial u} \end{pmatrix} = \det \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ \frac{1}{u} & -\frac{t}{u^2} \end{pmatrix} = -\frac{1}{u}.$$

Nous pouvons maintenant effectuer le changement de variables dans l'intégrale, ce qui nous donne

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}[g(Z)] &= \int_{[0,1]^2} g(xy)\, dxdy = \int_D g(t) \left| \frac{D(x,y)}{D(t,u)} \right| \, dtdu \\
&= \int_D g(t) \frac{1}{u}\, dtdu = \int_0^1 \int_0^1 g(t) \frac{1}{u} \mathbb{1}_{t<u}\, dtdu \\
&= \int_0^1 g(t) \left(\int_0^1 \frac{1}{u} \mathbb{1}_{t<u}\, du \right) dt = \int_0^1 g(t) \left(\int_t^1 \frac{1}{u}\, du \right) dt \\
&= \int_0^1 g(t)(-\log t)\, dt = \int_{-\infty}^{+\infty} g(t) \underbrace{(-\log t)\mathbb{1}_{]0,1]}(t)}_{\text{densité de la loi de } Z}\, dt.
\end{aligned}$$

La variable aléatoire $Z = XY$ a donc une loi absolument continue par rapport à la mesure de Lebesgue, de densité $(-\log x)\mathbb{1}_{]0,1]}(x)$.

5. Soient X, Y et Z des variables aléatoires réelles telles que X et Y ont même loi.

a) Soit $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Camille dit : $g(X)$ et $g(Y)$ ont même loi. Qu'en pensez-vous ?

b) Soient $(X_1, \ldots, X_n)$ et $(Y_1, \ldots, Y_n)$ des vecteurs aléatoires ayant même loi. Soit $h : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$. Claude dit : les variables aéaltoires réelles $h(X_1, \ldots, X_n)$ et $h(Y_1, \ldots, Y_n)$ ont même loi. Qu'en pensez-vous ?

c) Dominique dit : les vecteurs aléatoires (X, Z) et (Y, Z) ont même loi. Qu'en pensez-vous ?

d) On suppose que X et Z sont indépendantes, et que Y et Z le sont également. Yannick dit : les vecteurs aléatoires (X, Z) et (Y, Z) ont même loi, ainsi que les variables aléatoires réelles $X + Z$ et $Y + Z$. Qu'en pensez-vous ?

Solution de l'exercice 5.

a) Camille a raison : c'est une conséquence de la question suivante.

b) Soit $A \subseteq \mathbb{R}$. On a

$$\mathbb{P}(h(X_1, \ldots, X_n) \in A) = \mathbb{P}((X_1, \ldots, X_n) \in h^{-1}(A)),$$

où $h^{-1}(A) := \{(x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n : h(x_1, \ldots, x_n) \in A\} \subseteq \mathbb{R}^n$. Par hypothèse, $\mathbb{P}((X_1, \ldots, X_n) \in h^{-1}(A)) = \mathbb{P}((Y_1, \ldots, Y_n) \in h^{-1}(A))$. D'où

$$\mathbb{P}(h(X_1, \ldots, X_n) \in A) = \mathbb{P}(h(Y_1, \ldots, Y_n) \in A).$$

Comme $A \subseteq \mathbb{R}$ est quelconque, cela signifie que $h(X_1, \ldots, X_n)$ et $h(Y_1, \ldots, Y_n)$ ont même loi.

c) Si (X, Z) et (Y, Z) avaient même loi, $h(X, Z)$ et $h(Y, Z)$ auraient même loi pour toute fonction $h : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$. En particulier, $X + Z$ et $Y + Z$ auraient même loi, ce qui est faux en général. [Un contre-exemple simple avec $P_X = \mathscr{N}(0, 1)$, $Y := -X$ et $Z := X$.] Dominique a tort.

d) Soient $A \subseteq \mathbb{R}$ et $B \subseteq \mathbb{R}$. Puisque X et Z sont indépendantes, on a

$$\mathbb{P}(X \in A, Z \in B) = \mathbb{P}(X \in A)\,\mathbb{P}(Z \in B).$$

Par hyporgèse, X et Y ont la même loi, donc $\mathbb{P}(X \in A) = \mathbb{P}(Y \in A)$ (les deux valant $P_X(A)$ qui n'est autre que $P_Y(A)$), ce qui nous donne

$$\mathbb{P}(X \in A, Z \in B) = \mathbb{P}(Y \in A)\,\mathbb{P}(Z \in B).$$

L'indépendance entre Y et Z permet de voir que $\mathbb{P}(Y \in A)\,\mathbb{P}(Z \in B) = \mathbb{P}(Y \in A, Z \in B)$. Ainsi,

$$\mathbb{P}(X \in A, Z \in B) = \mathbb{P}(Y \in A, Z \in B).$$

Cette identité étant valable pour tous $A \subseteq \mathbb{R}$ et $B \subseteq \mathbb{R}$, on déduit, à l'aide d'un résultat du cours, que (X, Z) et (Y, Z) ont même loi.

En utilisant la conclusion de Dominique dans la question précédente, on voit que $X + Z$ et $Y + Z$ ont même loi : Yannick a raison.

6.

a) Soient $\theta > 0$ un nombre réel et k, $\ell \geq 1$ deux nombres entiers. Déterminer l'unique réel c tel que la fonction

$$f(x, y) = c\, x^{k-1} y^{\ell-1} e^{-\theta(x+y)} \mathbb{1}_{\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}_+}(x, y)$$

soit une fonction de densité. Déterminer la loi de la variable aléatoite réelle X. Cette loi porte le nom de la loi Gamma de paramètres θ et k. Que peut-on dire de cette loi lorsque $k = 1$?

b) Déterminer la loi de $X + Y$.

Solution de l'exercice 6.

a) S'il existe, ce réel c est l'unique réel tel que la fonction f soit positive et telle que son intégrale sur $\mathbb{R}^2$ par rapport à la mesure de Lebesgue vaille 1. N'importe quel c positif rend la fonction f positive. Pour que son intégrale vaille 1, il faut que

$$1 = \int_{(\mathbb{R}^+)^2} c x^{k-1} y^{\ell-1} e^{-\theta(x+y)}\, dxdy = c \int_0^{+\infty} x^{k-1} e^{-\theta x}\, dx \int_0^{+\infty} y^{\ell-1} e^{-\theta y}\, dy.$$

On vérifie aisément, par récurrence sur $n \geq 0$ et en utilisant une intégration par parties pour passer d'un rang au suivant, que

$$\forall n \geq 0, \int_0^{+\infty} x^n e^{-x}\, dx = n!.$$

Par un changement de variables linéaires, on en déduit que les intégrales que nous devons calculer valent respectivement $(k-1)!\theta^{-k}$ et $(\ell-1)!\theta^{-\ell}$. Ainsi, l'unique valeur de c qui convient est $c = \frac{\theta^{k+\ell}}{(k-1)!(\ell-1)!}$.
La variable aléatoire X a pour densité

$$f_1(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x, y)\, dy = \frac{\theta^k}{(k-1)!} x^{k-1} e^{-\theta x} \mathbb{1}_{\mathbb{R}^+}(x).$$

Pour $k = 1$, on reconnaît la loi exponentielle de paramètre θ.

b) On fait, comme à l'exercice précédent, le changement de variables $(x, y) = \frac{1}{2}(u + v, u - v)$, de sorte que $x + y = u$ et $\left|\frac{D(x,y)}{D(u,v)}\right| = \frac{1}{2}$. Ainsi, pour toute fonction $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continue et bornée, on a

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}[g(X+Y)] &= \frac{\theta^{k+\ell}}{(k-1)!(\ell-1)!} \int_{\mathbb{R}^2} g(x+y) x^{k-1} y^{\ell-1} e^{-\theta(x+y)} \mathbb{1}_{\{x \geq 0\}} \mathbb{1}_{\{y \geq 0\}}\, dxdy \\
&= \frac{\theta^{k+\ell}}{(k-1)!(\ell-1)! 2^{k+\ell-1}} \int_{\mathbb{R}^2} g(u) (u+v)^{k-1} (u-v)^{\ell-1} e^{-\theta u} \mathbb{1}_{\{u+v \geq 0\}} \mathbb{1}_{\{u-v \geq 0\}}\, dudv \\
&= \frac{\theta^{k+\ell}}{(k-1)!(\ell-1)! 2^{k+\ell-1}} \int_0^{+\infty} g(u) e^{-\theta u} \left(\int_{-u}^{u} (u+v)^{k-1} (u-v)^{\ell-1}\, dv \right) du,
\end{aligned}$$

en utilisant le fait que les conditions $u+v \geq 0$ et $u-v \geq 0$ équivalent aux conditions $u \geq 0$ et $|v| \leq u$. Une suite de $\ell-1$ intégrations par parties permet d'établir l'égalité

$$\begin{aligned}
\int_{-u}^{u} (u+v)^{k-1}(u-v)^{\ell-1}\, dv &= \frac{(\ell-1)!(k-1)!}{(k+\ell-2)!} \int_{-u}^{u} (v+u)^{k+\ell-2}\, dv \\
&= \frac{(\ell-1)!(k-1)!}{(k+\ell-2)!} \int_{0}^{2u} v^{k+\ell-2}\, dv \\
&= \frac{(\ell-1)!(k-1)!}{(k+\ell-1)!} 2^{k+\ell-1} u^{k+\ell-1}.
\end{aligned}$$

Finalement,

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}[g(X+Y)] &= \frac{\theta^{k+\ell}}{(k-1)!(\ell-1)!2^{k+\ell-1}} \int_0^{+\infty} g(u) e^{-\theta u} \frac{(\ell-1)!(k-1)!}{(k+\ell-1)!} 2^{k+\ell-1} u^{k+\ell-1}\, du \\
&= \frac{\theta^{k+\ell}}{(k+\ell-1)!} \int_0^{+\infty} g(u) u^{k+\ell-1} e^{-\theta u}\, du.
\end{aligned}$$

Ainsi, $X+Y$ suit une loi Gamma de paramètres θ et $k+\ell$.

7. Soit $X = (X_1, \ldots, X_n) \in \mathscr{L}^2$. Montrer que C_X, sa matrice de variance-covariance, est symétrique telle que pour tout $(a_1, \ldots, a_n) \in \mathbb{R}^n$,

$$\sum_{i,j=1}^{n} \mathrm{Cov}(X_i,\, X_j)\, a_i a_j \geq 0.$$

Solution de l'exercice 7. Soient $a_1, \ldots, a_n$ des réels. Calculons la somme dont nous voulons montrer qu'elle est positive, en écrivant la définition de la matrice D puis de la covariance, puis la linéarité de l'espérance

$$\begin{aligned}
\sum_{i,j=1}^{n} a_i \mathrm{Cov}(X_i, X_j) a_j &= \sum_{i,j=1}^{n} a_i \mathbb{E}[(X_i - E[X_i])(X_j - E[X_j])] a_j \\
&= \sum_{i,j=1}^{n} \mathbb{E}[a_i(X_i - E[X_i]) a_j (X_j - E[X_j])] \\
&= \mathbb{E}\left[\sum_{i,j=1}^{n} a_i(X_i - E[X_i]) a_j (X_j - E[X_j])\right] \\
&= \mathbb{E}\left[\sum_{i=1}^{n} a_i(X_i - E[X_i]) \sum_{j=1}^{n} a_j (X_j - E[X_j])\right] \\
&= \mathbb{E}\left[\left(\sum_{i=1}^{n} a_i(X_i - E[X_i])\right)^2\right].
\end{aligned}$$

La quantité qui nous intéresse est donc l'espérance d'une variable aléatoire positive et intégrable : c'est donc un nombre réel positif.

8. Soit $X = (X_1, X_2)$ un vecteur aléatoire de loi gaussienne $\mathcal{N}(\mathbf{m}, C_X)$, où $\mathbf{m} \in \mathbb{R}^2$.

a) Pourquoi peut-on écrire C_X sous la forme :

$$C_X = \begin{pmatrix} \sigma_1^2 & \rho\sigma_1\sigma_2 \\ \rho\sigma_1\sigma_2 & \sigma_2^2 \end{pmatrix}$$

avec $\sigma_1^2 = \mathrm{Var}(X_1)$, $\sigma_2^2 = \mathrm{Var}(X_2)$? Comment s'appelle le coefficient ρ ?

b) On supppose dans la suite que $|\rho| < 1$. Donner l'expression de la fonction de densité f de X.

Solution de l'exercice 8.

a) La matrice de covariance de X est :

$$\begin{pmatrix} \mathrm{Var}(X_1) & \mathrm{Cov}(X_1,\, X_2) \\ \mathrm{Cov}(X_1,\, X_2) & \mathrm{Var}(X_2) \end{pmatrix}$$

On trouve alors l'expression de l'énoncé en posant $\rho = \mathrm{Cov}(X_1,\, X_2)/\sqrt{\sigma_1\sigma_2}$, qui est la corrélation entre X_1 et X_2.

b) Si $|\rho| < 1$, la matrice de covariance de X est inversible. Un résultat du cours dit que X a alors une densité, donnée par

$$\frac{1}{2\pi\sigma_1\sigma_2\sqrt{1-\rho^2}} \exp\Big[-\frac{1}{2(1-\rho^2)}\Big(\frac{(x_1-m_1)^2}{\sigma_1^2} + \frac{(x_2-m_2)^2}{\sigma_2^2} - \frac{2\rho(x_1-m_1)(x_2-m_2)}{\sigma_1\sigma_2}\Big)\Big],$$

où l'on écrit $\mathbf{m} := (m_1,\, m_2)$.