TD3. Probabilité conditionnelle, indépendance, Borel–Cantelli

1. Soit Ω un ensemble. Soit $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de parties de Ω. Déterminer les relations d'inclusion qui existent toujours entre les parties suivantes de Ω :

$$\bigcup_{n\in\mathbb{N}}\bigcap_{k\geq n} A_k,\ \bigcap_{n\in\mathbb{N}}\bigcup_{k\geq n} A_k,\ \bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n,\ \bigcap_{n\in\mathbb{N}} A_n,\ \Omega,\ \varnothing.$$

Montrer par un exemple que ces six parties peuvent être deux à deux distinctes.

Solution de l'exercice 1. La partie vide est incluse dans toute partie de Ω, et toute partie de Ω est incluse dans Ω. En ce qui concerne les quatre autres parties, on peut les décrire avec des mots de la façon suivante :

L'ensemble ci-dessous	est l'ensemble des $\omega\in\Omega$ qui sont dans ...
$\bigcap_{n\in\mathbb{N}} A_n$	... tous les A_n,
$\bigcup_{n\in\mathbb{N}}\bigcap_{k\geq n} A_k$	... tous les A_n à partir d'un certain rang,
$\bigcap_{n\in\mathbb{N}}\bigcup_{k\geq n} A_k$	... une infinité des A_n,
$\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n$	... au moins un des A_n.

Ces conditions sont de moins en moins contraignantes : elles sont donc satisfaites par une partie de plus en plus grande de Ω. On a donc toujours les inclusions

$$\varnothing \subset \bigcap_{n\in\mathbb{N}} A_n \subset \bigcup_{n\in\mathbb{N}}\bigcap_{k\geq n} A_k \subset \bigcap_{n\in\mathbb{N}}\bigcup_{k\geq n} A_k \subset \bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n \subset \Omega.$$

Prenons l'exemple suivant : $\Omega=\{1,2,3,4,5\}$. Posons $A_1=\{1\}$, $A_2=\{1,2,3,4\}$, $A_3=\{1,2\}$, $A_4=\{1,2,3\}$, puis $A_{2n+1}=\{1,2\}$ et $A_{2n+2}=\{1,2,3\}$ pour tout $n\geq 2$. On a alors

$$\bigcap_{n\in\mathbb{N}} A_n=\{1\},\ \bigcup_{n\in\mathbb{N}}\bigcap_{k\geq n} A_k=\{1,2\},\ \bigcap_{n\in\mathbb{N}}\bigcup_{k\geq n} A_k=\{1,2,3\},\ \bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n=\{1,2,3,4\}$$

si bien que les cinq inclusions qui sont vraies en général sont, dans ce cas particulier, strictes.

2. On considère une suite $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ d'événements. Montrer que

a) si $P(A_n) = 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, alors $P\big(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n\big) = 0$;
b) si $P(A_n) = 1$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, alors $P\big(\bigcap_{n\in\mathbb{N}} A_n\big) = 1$.

Solution de l'exercice 2. a) On a

$$P\Big(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n\Big) \le \sum_{n\in\mathbb{N}} P(A_n) = 0$$

b) En passant au complémentaire, on a $P({}^cA_n) = 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, donc

$$1 - P\Big(\bigcap_{n\in\mathbb{N}} A_n\Big) = P\Big(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} {}^cA_n\Big) = 0\,.$$

3. Que peut-on dire d'un événement qui est indépendant de lui-même ?

Solution de l'exercice 3. Soit A un événement de Ω. Par définition, si A est indépendant de lui-même, alors $P(A)^2 = P(A)$. Ainsi, on a soit $P(A) = 0$ ou $P(A) = 1$.

4. Faux positifs. Une maladie M affecte une personne sur 1000 dans une population donnée. Un test sanguin permet de détecter cette maladie avec une fiabilité de 99% (lorsque cette maladie est effectivement présente). En revanche, pour un individu sain, la probabilité que le test soit positif est de 0.1% (on dit que 0.1% est le taux de faux positifs). Si un test est positif, quelle est la probabilité que l'individu soit réellement malade ?

Solution de l'exercice 4. On choisit comme espace des états Ω l'ensemble des individus de la population. On appelle M l'événement "l'individu est malade", et P l'événement "le test est positif". Alors, l'énoncé nous dit que :

$$P(M) = \frac{1}{1000},\ \text{d'où } P({}^cM) = \frac{999}{1000},\quad P(P\,|\,M) = \frac{99}{100},\quad P(P\,|\,{}^cM) = \frac{1}{1000}.$$

On cherche $P_P(M)$. D'après la formule de Bayes, nous avons :

$$P(M\,|\,P) = \frac{P(P\,|\,M)P(M)}{P(P\,|\,M)P(M) + P(P\,|\,{}^cM)P({}^cM)} = \frac{990}{999+990} \simeq 0,5.$$

Si le test est positif, la probabilité que l'individu est réellement malade est de $0,5$. Donc attention avant de tirer des conclusions trop hâtives.

5. Une personne teste un détecteur de mensonge. On note les événements suivants :

$$\begin{aligned} A &:= \{\text{la personne dit la vérité}\},\\ B &:= \{\text{la personne ment}\}\\ C &:= \{\text{le détecteur conclut que “la personne ment”}\}\,. \end{aligned}$$

On suppose que $p := P(B) \in]0,\, 1[$.

a) Montrer que $P(C \,|\, A)$ est bien définie.

b) On suppose désormais que $P(C \,|\, B) > 0$ (ce qui est rassurant). On note $r := \frac{P(C \,|\, A)}{P(C \,|\, B)}$. Calculer $P(B \,|\, C)$ en fonctions de p et de r.

c) A-t-on $P(B \,|\, C) > P(B)$?

Solution de l'exercice 5. a) Par définition, $A = {}^c\!B$, donc $P(A) = 1 - P(B) = 1 - p > 0$. Ainsi, $P(C \,|\, A)$ est bien définie.

b) Puisque $P(C \,|\, B) > 0$, on a $P(C \cap B) = P(C \,|\, B)\, P(B) > 0$. En particulier, $P(A \,|\, C)$ est également bien définie.

Par définition, $P(C \,|\, A) = \frac{P(C \cap A)}{P(A)} = \frac{P(C)\, P(A \,|\, C)}{P(A)}$. De même, $P(C \,|\, B) = \frac{P(C)\, P(B \,|\, C)}{P(B)}$. Donc

$$r = \frac{P(C \,|\, A)}{P(C \,|\, B)} = \frac{P(C)\, P(A \,|\, C)/P(A)}{P(C)\, P(B \,|\, C)/P(B)} = \frac{P(A \,|\, C)/P(A)}{P(B \,|\, C)/P(B)} = \frac{p}{1-p} \frac{P(A \,|\, C)}{P(B \,|\, C)}.$$

Vu que $P(A \,|\, C) = 1 - P(B \,|\, C)$ (car un résultat du cours dit que la probabilité conditionnelle est une probabilité), on arrive à :

$$P(B \,|\, C) = \frac{p}{r(1-p) + p}.$$

c) D'après la question précédente, on voit que $P(B \,|\, C) > P(B)$ si et seulement si $r(1 - p) + p < 1$, c'est-à-dire si et seulement si $r < 1$.

6. Soit $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite d'événements. Montrer que $P(\limsup_{n \to \infty} A_n) \geq \limsup_{n \to \infty} P(A_n)$.

Solution de l'exercice 6. Posons $B_n := \cup_{k \geq n} A_k$. Par définition, (B_n) est une suite d'événements décroissants, avec $\cap_{n \in \mathbb{N}} B_n = \limsup_{n \to \infty} A_n$. Par la continuité à droite de P (voir le chapitre 2 du cours), $P(\limsup_{n \to \infty} A_n) = \lim_{n \to \infty} \downarrow P(B_n)$. Comme $B_n \supseteq A_n$, on a $P(B_n) \geq P(A_n)$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, donc $\lim_{n \to \infty} \downarrow P(B_n) \geq \limsup_{n \to \infty} P(A_n)$, ce qui donne l'inégalité cherchée.

7. Soient $X_1, X_2, \ldots$ des variables aléatoires discrètes. On suppose que pour tout $n \geq 1$, X_n suit la loi Bernoulli de paramètre $\frac{1}{n^2}$. Montrer que $P(\sum_{n=1}^{\infty} X_n < \infty) = 1$.

Solution de l'exercice 7. Posons $A_n := \{X_n = 1\}$. Par hypothèse, $P(A_n) = \frac{1}{n^2}$ pour tout $n \geq 1$. Donc $\sum_{n=1}^{\infty} P(A_n) < \infty$. D'après le lemme de Borel–Cantelli, $P(\sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{1}_{A_n} = \infty) = 0$, c'est-à-dire que $P(\sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{1}_{A_n} < \infty) = 1$. Il suffit alors d'observer que $X_n = \mathbb{1}_{A_n}$.

8. Un chimpanzé tape infiniment à la machine à écrire en appuyant chaque seconde sur une touche choisie au hasard. On arrivera à calculer la probabilité qu'il parvienne à écrire tout *Hamlet*, c'est-à-dire qu'à un certain moment il écrive d'une traite tout le texte de cette pièce. On suppose que l'ensemble des touches A est fini et que, en terme de touches, la longeur de *Hamlet* soit N.

a) Décrire l'ensemble Ω et la mesure de probabilité P où formuler l'événement cherché.

b) Écrire l'événement cherché comme un sous-ensemble $H \subseteq \Omega$.

c) Trouver une suite d'événements $\{B_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ indépendants telle que ${}^c\!H \subseteq \bigcap_{n=0}^{+\infty} B_n$.

d) Calculer $P({}^c\!H)$ et déduire $P(H)$.

Solution de l'exercice 8.

a) C'est naturel de considérer $\Omega = A^{\mathbb{N}}$, l'ensemble des suites à valeurs dans A, pour modéliser les résultats des écritures. Pour décrire P on utilise la suite des cordonnées $\{X_k\}_{k\geq 0}$ $X_k \colon \Omega \to A$, définie par $X_k(\omega) := \omega(k)$. La notion de choix au hasard sur P est traduite par les conditions :

— pour tout $a \in A$

$$P(X_k = a) = \frac{1}{|A|}\,,$$

— pour tout a_k, les événements $\{X_k = a_k\}$ sont indépendants.

b) En écrivant Hamlet sous la forme $a_1 \cdots a_N$ où $a_i \in A$ on introduit pour $n \geq 0$ les ensembles

$$A_n^N = \{X_n = a_1\,, \cdots, X_{n+N-1} = a_N\}\,,$$

$\omega \in A_n^N$ si on arrive à écrire Hamlet au moment n. D'où l'on a trivialement $H = \bigcup_{n=0}^{+\infty} A_n^N$. On remarque aussi $P(A_n^N) = 1/|A|^N$ pour tout n.

c) Grâce aux formules de Morgan ${}^cH = \bigcap_{n=0}^{+\infty} {}^c(A_n^N)$. En revanche, les évévenements $\{A_n^N\}$ ne sont pas indépendants parce que, par exemple

$$A_{n+1}^N \cap A_n^N = \{X_n = a_1\,, X_{n+N} = a_N\}\,,$$

et $P(A_{n+1}^N \cap A_n^N) \neq P(A_{n+1}^N)\, P(A_n^N)$. Pour obtenir l'indépendance on peut considérer, par example les événements

$$B_n := A_{nN}^N = \{X_{nN} = a_1\,, \cdots, X_{N(n+1)-1} = a_N\}\,,$$

Comme les $\{B_n\}$ dépendent des composantes distinctes des X_n ils sont indépendants et ils satisfont $\bigcup_{n=0}^{+\infty} B_n \subset H$.

d) En utilisant l'indépendance on a

$$P(\bigcap_{n=0}^{m} {}^c(B_n)) = \left(1 - \frac{1}{|A|^N}\right)^m$$

lorsque $m \to +\infty$ le terme à droite converge vers 0 et celui à gauche vers $P(\bigcap_{n=0}^{+\infty} {}^c(B_n))$. D'où $P({}^cH) = 0$ et donc $P(H) = 1$.

9. Le but de cet exercice est de prouver qu'il n'existe pas de probabilité sur $\mathbb{N}^*$ telle que pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, $P(A_k) = \frac{1}{k}$, où $A_k = k\mathbb{N}$. On suppose l'existence d'une telle probabilité.

a) Montrer que deux événements A_p et A_q sont indépendants si et seulement si p et q sont premiers entre eux.

b) On définit l'événement $B := \{n \in \mathbb{N} : n \text{ appartient à une infinité de } A_p \text{ avec } p \text{ permier}\}$. On admettra que la série des inverses des nombres premiers diverge. Montrer que B est vide et de probabilité 1. Conclure.

Solution de l'exercice 9.

a) On considère $p, q \in \mathbb{N}$, par définition du ppcm, $A_{ppcm(p,q)} = A_p \cap A_q$. On a donc $P(A_p \cap A_q) = \frac{1}{ppcm(p,q)}$. Or on a $ppcm(p,q)pgcd(p,q) = pq$, ce qui donne $P(A_p \cap A_q) = pgcd(p,q)P(A_p)P(A_q)$. Ainsi les évenement sont indépendant si et seulement si $pgcd(p,q) = 1$, c'est à dire si p et q sont premiers entre eux.

b) Soit $\mathcal{P}$ l'ensemble des nombres premiers. $\mathcal{P}$ est infini dénombrable, on se donne $(p_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite strictement croissante des nombres premiers. Les événements $B_n := A_{p_n}$ sont indépendants : soit $r \in \mathbb{N}$, $q_1, ..., q_r \in \mathcal{P}$ distincts, alors $P(A_{p_1} \cap ... \cap A_{p_r}) = P(A_{ppcm(p_1,...,p_r)}) = P(A_{p_1})...P(A_{p_r})$. On applique le lemme de Borel–Cantelli aux B_n, la série de leurs probabilités diverge et ce sont des évenements indépendants, on en déduit que $P(\sum_{n\in\mathbb{N}^*} \mathbb{1}_{B_n} = \infty) = 1$; autrement dit, $P(B) = 1$. Cependant B est vide car un entier n'est divisible que par un nombre fini de nombres premiers. On a donc $P(\varnothing) = 1$ ce qui contredit le fait que P est une probabilité. On conclut donc qu'il ne peut exister de probabilité sur $\mathbb{N}^*$ telle que pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, $P(A_k) = \frac{1}{k}$.

EXERCICES SUR LES VARIABLES ALÉATOIRES DISCRÈTES :

10. Soient X, Y : $(\Omega, \mathscr{F}, P) \to \mathbb{R}$ des variables aléatoires à valeurs dans $\mathbb{N}$. Montrer que $\sum_{n\geq 0} nP(X = n) + \sum_{n\geq 0} nP(Y = n) = \sum_{n\geq 0} nP(X + Y = n)$.

Solution de l'exercice 10. Le membre de gauche est $\mathbb{E}(X) + \mathbb{E}(Y)$ et le membre de droite est $\mathbb{E}(X + Y)$. Par linéarité de l'espérance, ils sont donc égaux.

Donnons une deuxième démonstration de cette égalité. Calculons le membre de droite.

On trouve

$$\begin{aligned}
\sum_{n\geq 0} nP(X+Y=n) &= \sum_{n\geq 0}\sum_{k=0}^{n} nP(X=k \text{ et } Y=n-k)\\
&= \sum_{n\geq 0}\sum_{k\geq 0} \mathbb{1}_{\{k\leq n\}} nP(X=k \text{ et } Y=n-k)\\
&= \sum_{k\geq 0}\sum_{n\geq 0} \mathbb{1}_{\{k\leq n\}} nP(X=k \text{ et } Y=n-k)\\
&= \sum_{k\geq 0}\sum_{n\geq k} nP(X=k \text{ et } Y=n-k)\\
&= \sum_{k\geq 0}\sum_{l\geq 0} (k+l)P(X=k \text{ et } Y=l)\\
&= \sum_{k\geq 0} k\sum_{l\geq 0} P(X=k \text{ et } Y=l) + \sum_{l\geq 0} l\sum_{k\geq 0} P(X=k \text{ et } Y=l).
\end{aligned}$$

Dans le premier terme de la dernière ligne, pour tout $k \geq 0$, la somme sur l est la somme des probabilités d'événements deux à deux disjoints dont la réunion vaut $\{X=k\}$. De même, dans le deuxième terme, pour tout $l \geq 0$, la somme sur k est la somme des probabilités d'événements deux à deux disjoints dont la réunion vaut $\{Y=l\}$. Ainsi, on trouve

$$\sum_{n\geq 0} nP(X+Y=n) = \sum_{k\geq 0} kP(X=k) + \sum_{l\geq 0} lP(Y=l),$$

ce qui, au nom des indices près, est la formule voulue.

11. On étudie des variables aléatoires qui ont une propriété d'absence de mémoire. Soit T une variable aléatoire à valeurs dans $\mathbb{N}$. On suppose que pour tous $n, m \geq 0$ entiers, on a $P(T \geq n+m) = P(T \geq n)P(T \geq m)$. Que peut-on dire sur la loi de T ?

Solution de l'exercice 11. Par récurrence sur n, on voit immédiatement que $P(T \geq n) = P(T \geq 1)^n$ pour tout entier $n \geq 0$. On en déduit que pour tout $n \geq 0$, $P(T = n) = P(T \geq n) - P(T \geq n+1) = P(T \geq 1)^n(1 - P(T \geq 1))$. Ainsi, T suit la loi géométrique de paramètre $1 - P(T \geq 1)$.

12. $2n$ personnes, n hommes et n femmes, sont réparties de manière aléatoire dans deux groupes de n personnes chacun. On appelle X le nombre de femmes dans le premier groupe.

a) Combien y a-t-il de manières de répartir $2n$ personnes en deux groupes de n personnes ?

b) Donner la loi de X.

c) Calculer $\mathbb{E}(X)$. *On pourra écrire* $X = \sum_{i=1}^n \mathbb{1}_{A_i}$ *où* A_i *est l'événement « la* $i^{\text{ème}}$ *femme est dans le premier groupe ».*

Solution de l'exercice 12. a) Il faut choisir quelles personnes vont dans le premier groupe, il y a $\binom{2n}{n}$ façon de le faire.

b) Pour avoir $X = k$, c'est-à-dire k femmes dans le premier groupe, il y a $\binom{n}{k}$ manières de choisir quelles femmes iront dans le premier groupe, et $\binom{n}{n-k}$ manières de choisir les hommes qui les accompagneront. On a donc

$$\mathbb{P}(X = k) = \frac{\binom{n}{k}\binom{n}{n-k}}{\binom{2n}{n}} \qquad k = 1, \ldots, n\,.$$

c) Avec l'indication, on a

$$\mathbb{E}(X) = \sum_{i=1}^n \mathbb{E}(\mathbb{1}_{A_i}) = \sum_{i=1}^n \mathbb{P}(A_i) = \frac{n}{2}\,.$$

13. On effectue des lancers successifs (et indépendants) de dés : pour le n^{e} lancer, on utilise un dé à n faces équiprobables.

a) On note A_n l'événement "le n^{e} dé tombe sur 1". On note $A = \bigcup_{n\geq 1} A_n$. Interpréter l'événement A (sans utiliser les expressions "quelque soit" ni "il existe") et montrer que $P(A) = 1$.

b) On note $B = \bigcap_{k\geq 1} \bigcup_{n\geq k} A_n$. Interpréter l'événement B et montrer que $P(B) = 1$.