TD2. Probabilités sur un ensemble dénombrable.

1. Soit $(\Omega, \mathscr{A}, P)$ un espace de probabilité. Soient A_n, $n \in \mathbb{N}$, des éléments de $\mathscr{A}$. A-t-on $P(\cup_{n\in\mathbb{N}} A_n) = \sum_{n\in\mathbb{N}} P(A_n)$?

Solution de l'exercice 1. Si A_n, $n \in \mathbb{N}$, sont deux à deux disjoints, c'est la σ-additivité de P.

En général (c'est-à-dire sans l'hypothèse que A_n, $n \in \mathbb{N}$, soient deux à deux disjoints), l'identité n'a pas lieu : par exemple, si $A_n = \Omega$, $n \in \mathbb{N}$. Rappelons néanmoins que $P(\cup_{n\in\mathbb{N}} A_n) \le \sum_{n\in\mathbb{N}} P(A_n)$.

2. Soit $(\Omega, \mathscr{A}, P)$ un espace de probabilité. Soit $n \ge 1$. Soient $A_1, \ldots, A_n$ des éléments de $\mathscr{A}$. Montrer que

$$P(A_1 \cup \ldots \cup A_n) = \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k-1} \sum_{1\le i_1<\ldots<i_k\le n} P\left(A_{i_1} \cap \ldots \cap A_{i_k}\right).$$

C'est la formule d'*inclusion-exclusion.*

Solution de l'exercice 2.

a. Première méthode. Si on se donne un espace probabilisé $(\Omega, \mathscr{F}, P)$ et un événement A de $\mathscr{F}$, alors $E(\mathbb{1}_A) = P(A)$. De plus, on a démontré à la feuille précédente que :

$$\mathbb{1}_{A_1\cup\cdots\cup A_n} = \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k-1} \sum_{1\le i_1<i_2<\cdots<i_k\le n} \mathbb{1}_{A_{i_1}\cap A_{i_2}\cap\cdots\cap A_{i_k}}.$$

En prenant l'espérance de chaque côté et en utilisant la linéarité, on obtient le résultat voulu.

Deuxième méthode.

On démontre cette formule par récurrence sur n. Pour $n = 1$, la formule dit que $P(A_1) = P(A_1)$. Pour $n = 2$, la formule s'écrit $P(A_1 \cup A_2) = P(A_1) + P(A_2) - P(A_1 \cap A_2)$ et c'est un énoncé démontré dans le cours. Supposons la formule établie pour $n-1$ événements, avec $n \ge 3$, et considérons n événements $A_1, \ldots, A_n$. On a

$$\begin{aligned} P(A_1 \cup \ldots \cup A_n) &= P((A_1 \cup \ldots \cup A_{n-1}) \cup A_n) \\ &= P(A_1 \cup \ldots \cup A_{n-1}) + P(A_n) - P((A_1 \cup \ldots \cup A_{n-1}) \cap A_n) \\ &= P(A_1 \cup \ldots \cup A_{n-1}) + P(A_n) - P((A_1 \cap A_n) \cup \ldots \cup (A_{n-1} \cap A_n)) \end{aligned}$$

L'hypothèse de récurrence permet de calculer le premier et le troisième terme du membre de droite et on obtient :

$$\begin{aligned}
P(A_1 \cup \ldots \cup A_n) &= \sum_{k=1}^{n-1}(-1)^{k-1} \sum_{1\le i_1<\ldots<i_k\le n-1} P\left(A_{i_1}\cap \ldots \cap A_{i_k}\right) + P(A_n) \\
&\quad - \sum_{k=1}^{n-1}(-1)^{k-1} \sum_{1\le i_1<\ldots<i_k\le n-1} P\left(A_{i_1}\cap \ldots \cap A_{i_k}\cap A_n\right) \\
P(A_1 \cup \ldots \cup A_n) &= P(A_1) + P(A_2) + \ldots P(A_n) \\
&\quad + \sum_{k=2}^{n-1}(-1)^{k-1} \sum_{1\le i_1<\ldots<i_k\le n-1} P\left(A_{i_1}\cap \ldots \cap A_{i_k}\right) \\
&\quad - \sum_{k=1}^{n-2}(-1)^{k-1} \sum_{1\le i_1<\ldots<i_k\le n-1} P\left(A_{i_1}\cap \ldots \cap A_{i_k}\cap A_n\right) \\
&\quad - (-1)^{n-2} P(A_1\cap A_2 \cap \ldots A_n) \\
P(A_1 \cup \ldots \cup A_n) &= P(A_1) + P(A_2) + \ldots P(A_n) \\
&\quad + \sum_{k=2}^{n-1}(-1)^{k} \sum_{1\le i_1<\ldots<i_k\le n} P\left(A_{i_1}\cap \ldots \cap A_{i_k}\right) \\
&\quad + (-1)^{n-1} P(A_1\cap A_2 \cap \ldots A_n)
\end{aligned}$$

où dans la dernière inégalité on utilise que

$$\begin{aligned}
&- \sum_{k=1}^{n-2}(-1)^{k-1} \sum_{1\le i_1<..<i_k\le n-1} P\left(A_{i_1}\cap \ldots \cap A_{i_k}\cap A_n\right) \\
&\quad = \sum_{k=2}^{n-1}(-1)^{k-1} \sum_{1\le i_1<..<i_k\le n | i_k=n} P\left(A_{i_1}\cap \ldots \cap A_{i_k}\right)
\end{aligned}$$

On obtient bien la formule souhaitée pour $P(A_1\cap \ldots \cap A_n)$.

3. Soit $(\Omega, \mathscr{A}, P)$ un espace de probabilité. Soient A_n, $n \in \mathbb{N}$, des éléments de $\mathscr{A}$. Alice dit : Pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $N < \infty$ tel que $P(\cup_{n=0}^N A_n) \ge P(\cup_{n=0}^\infty A_n) - \varepsilon$. Qu'en pensez-vous ?

Solution de l'exercice 3. Posons $B_k := \cup_{n=0}^k A_n$, $k \in \mathbb{N}$. C'est une suite croissante d'événements. La continuité à gauche de P implique que $\lim_{k\to\infty} \uparrow P(B_k) = P(\cup_{k\in\mathbb{N}} B_k) \ge P(\cup_{k\in\mathbb{N}} A_k)$ (c'est une égalité, en fait). Donc pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $N < \infty$ tel que $P(B_N) \ge P(\cup_{k\in\mathbb{N}} A_k) - \varepsilon$: Alice a raison.

4. Paradoxe des anniversaires

a) Quelle est la probabilité pour que parmi N personnes, au moins 2 aient la même date d'anniversaire ? (*On négligera l'existence du 29 février* et on denotera une date avec un element $d \in \{1, \cdots, 365\}$)

b) Pour quelle valeur de N cette probabilité est-elle supérieure à $1/2$?

Solution de l'exercice 4. Attribuons un numéro de 1 à N à chaque personne. Les dates d'anniversaire de ces N personnes constituent une application de $\{1, \ldots, N\}$ dans l'ensemble $\{1, \ldots, 365\}$ des jours de l'année. On prend donc $\Omega = \{1, \ldots, 365\}^{\{1,\ldots,N\}}$, muni de la tribu $\mathscr{F} = \mathscr{P}(\Omega)$ et de la probabilité uniforme. Ainsi pour tout événement A de $\mathscr{F}$, on a $P(A) = \frac{|A|}{|\Omega|} = \frac{|A|}{365^N}$.

Soit A l'événement "au moins deux personnes ont leur anniversaire le même jour", nous voulons calculer $P(A)$. Il est plus facile de considérer l'événement contraire A^c "toutes les personnes ont leur anniversaire un jour différent", qui est l'ensemble des applications injectives. On a :

$$P(A^c) = \frac{|A^c|}{|\Omega|} = \frac{A_{365}^N}{365^N} = \frac{365}{365}\frac{364}{365} \cdots \frac{365 - (N-1)}{365} = \prod_{k=0}^{N-1} \left(1 - \frac{k}{365}\right).$$

On peut montrer que la suite $u_N = \prod_{k=0}^{N-1} \left(1 - \frac{k}{365}\right)$ est décroissante, et bien sûr on a $u_{366} = 0$, on peut donc déterminer numériquement la première valeur de N pour laquelle $u_N < \frac{1}{2}$. On trouve $N = 23$.

5. Soient X, Y, Z trois variables aléatoires à valeurs dans $\mathbb{N}$. On suppose que X et Y ont même loi. Soit $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ une fonction.

a) Est-il vrai que $f(X)$ et $f(Y)$ ont même loi ?

b) Est-il vrai que $X + Z$ et $Y + Z$ ont même loi ?

Solution de l'exercice 5. Soit $(\Omega, \mathscr{F}, P)$ l'espace probabilisé sur lequel les variables aléatoires X, Y et Z sont définies. Les variables aléatoires $f(X)$ et $f(Y)$ ont même loi si pour tout $n \in \mathbb{N}$, $P(\{f(X) = n\}) = P(\{f(Y) = n\})$. Or,

$$\begin{aligned}\{f(X) = n\} &= \{\omega \in \Omega \ : \ f(X(\omega)) = n\} \\ &= \{\omega \in \Omega \ : \ X(\omega) \in f^{-1}(\{n\})\} \\ &= \{X \in f^{-1}(\{n\})\}.\end{aligned}$$

De manière analogue, $\{f(Y) = n\} = \{Y \in f^{-1}(\{n\})\}$. Comme X et Y ont même loi, on a $P(\{X \in f^{-1}(\{n\})\}) = P(\{Y \in f^{-1}(\{n\})\})$, d'où on déduit que les variables aléatoires $f(X)$ et $f(Y)$ ont même loi.

En revanche, $X + Z$ et $Y + Z$ peuvent avoir des lois différentes. Par exemple, on considère l'expérience suivante : on lance une pièce de monnaie équilibrée, c'est à dire que l'on choisit $\Omega = \{P, F\}$, $\mathscr{F} = \mathscr{P}(\Omega)$, P la probabilité uniforme sur $(\Omega, \mathscr{F})$. On définit trois variables aléatoires X, Y, Z sur Ω ainsi :

$$X(P) = 0,\ Y(P) = 1,\ Z(P) = 2; \quad X(F) = 1,\ Y(F) = 0,\ Z(F) = 5$$

Ainsi, $P(\{X = 0,\ Y = 1,\ Z = 2\}) = P(P) = \frac{1}{2}$ et $P(\{X = 1,\ Y = 0,\ Z = 5\}) = P(F) = \frac{1}{2}$.
Alors X et Y suivent la même loi :

$$\begin{aligned}
P(\{X = 0\}) &= P(\{X = 0,\ Y = 1,\ Z = 2\}) = \frac{1}{2}, \\
P(\{X = 1\}) &= P(\{X = 1,\ Y = 0,\ Z = 5\}) = \frac{1}{2} \\
P(\{Y = 0\}) &= P(\{X = 1,\ Y = 0,\ Z = 5\}) = \frac{1}{2}, \\
P(\{Y = 1\}) &= P(\{X = 0,\ Y = 1,\ Z = 2\}) = \frac{1}{2},
\end{aligned}$$

mais $X + Z$ et $Y + Z$ ont des lois différentes. En effet :

$$P(\{X + Z = 2\}) = P(\{X = 0,\ Y = 1,\ Z = 2\}) = \frac{1}{2} \text{ et } P(\{Y + Z = 2\}) = P(\emptyset) = 0.$$

6. Soit X une variable aléatoire de Poisson de paramètre $\theta \in]0, \infty[$, c'est-à-dire que $P(X = k) = e^{-\theta} \frac{\theta^k}{k!}$, $k \in \mathbb{N}$. Calculer $E(X)$.

Solution de l'exercice 6. Puisque X est à valeurs dans $\mathbb{N}$, $E(X) \in [0, \infty]$ est bien définie, et

$$E(X) = \sum_{k=1}^{\infty} k\, P(X = k) = \sum_{k=1}^{\infty} k\, e^{-\theta} \frac{\theta^k}{k!} = \sum_{k=1}^{\infty} e^{-\theta} \frac{\theta^k}{(k-1)!}\,.$$

Avec un changement d'indices $j = k - 1$, on voit que

$$E(X) = \sum_{j=0}^{\infty} e^{-\theta} \frac{\theta^{j+1}}{j!} = e^{-\theta}\, \theta \sum_{j=0}^{\infty} \frac{\theta^j}{j!} = e^{-\theta}\, \theta\, e^{\theta} = \theta\,,$$

ce que l'on a appris dans le cours.

7. Soit X une variable aléatoire à valeurs dans $\mathbb{N}$. Montrer que

$$E(X) = \sum_{n=1}^{\infty} P(X \geq n)\,.$$

Solution de l'exercice 7. Posons $A_k := \{X = k\}$, $k \geq 1$. Les événements A_k, $k \geq 1$, sont deux à deux incompatibles. On a $\{X \geq n\} = \sqcup_{k=n}^{\infty} A_k$, donc par σ-additivité,

$$P(X \geq n) = \sum_{k=n}^{\infty} P(A_k) = \sum_{k=1}^{\infty} P(A_k)\, a_{k,n}\,,$$

où $a_{k,n} := 1$ si $k \geq n$ et $a_{k,n} := 0$ sinon. Comme $P(A_k)\, a_{k,n} \geq 0$, la proposition 1.7 du chapitre 1 nous permet de voir que

$$\sum_{n=1}^{\infty} P(X \geq n) = \sum_{n=1}^{\infty}\sum_{k=1}^{\infty} P(A_k)\, a_{k,n} = \sum_{k=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty} P(A_k)\, a_{k,n}\,.$$

Pour chaque entier $k \geq 1$, on a $\sum_{n=1}^{\infty} P(A_k)\, a_{k,n} = P(A_k)\sum_{n=1}^{\infty} a_{k,n} = k\, P(A_k)$. Donc

$$\sum_{n=1}^{\infty} P(X \geq n) = \sum_{k=1}^{\infty} k\, P(A_k)\,,$$

qui n'est autre que $E(X)$.

8. Dans une assemblée de n personnes, on demande à chaque personne d'écrire son nom sur un bout de papier et de le mettre dans un chapeau. On agite le chapeau puis chacun tire un bout de papier (sans le remettre). Soit X le nombre de personnes qui tirent le bout de papier portant son propre nom. Déterminer $E(X)$.

Indication : On ne cherche pas à déterminer la loi de X.

Solution de l'exercice 8. On attribue à chaque personne un numéro entre 1 et n. Chaque personne tire un (seul) nom du chapeau et l'application qui au numéro d'une personne associe le numéro de la personne dont elle a tiré le nom est une bijection de l'ensemble $\{1, \ldots, n\}$ dans lui-même. On prend pour Ω l'ensemble des permutations de l'ensemble $\{1, \ldots, n\}$, alors $|\Omega| = n!$. On munit Ω de la tribu $\mathscr{F} = \mathscr{P}(\Omega)$ et de la probabilité uniforme, notée P, de sorte que pour tout événement A de $\mathscr{F}$, on a $P(A) = \frac{|A|}{|\Omega|}$.

Pour tout $i \in \{1, \ldots, n\}$, on note A_i l'ensemble des permutations $\sigma : \{1, \ldots, n\} \to \{1, \ldots, n\}$ telles que $\sigma(i) = i$. Il est alors clair que $X = \sum_{i=1}^{n} \mathbb{1}_{A_i}$. On a $E(\mathbb{1}_{A_i}) = P(A_i) = \frac{(n-1)!}{n!} = \frac{1}{n}$ pour tout $i \in \{1, \ldots, n\}$, ce qui implique, grâce à la linéarité de E, que $E(X) = \sum_{i=1}^{n} E(\mathbb{1}_{A_i}) = 1$.

9. Soit X une variable aléatoire discrète telle que X^2 est intégrable. Rappelons que l'on a $E(|X|) < \infty$ dans ce cas.

a) Montrer que pour tout réel $a \in \mathbb{R}$, $E((X-a)^2) < \infty$.

b) Montrer que pour tout réel $a \in \mathbb{R}$, $Var(X - a) = Var(X)$.

c) Posons $m := E(X)$, et $f(a) := E((X - a)^2)$, $a \in \mathbb{R}$. Montrer que $f(a) \geq f(m)$ pour tout $a \in \mathbb{R}$, l'inégalité étant une égalité si et seulement si $a = m$.

Solution de l'exercice 9. a) On a $(X - a)^2 = X^2 + a^2 - 2aX$. Comme X^2, a^2 et $-2aX$ sont intégrables, c'est également le cas pour leur somme. Ainsi, $E((X - a)^2) < \infty$.

b) Posons $Y := X - a$, qui est de carré-intégrable. Par définition, $Var(Y) = E[(Y - E(Y))^2]$. Comme $E(Y) = E(X) - a$ (linéarité de l'espérance), on a $Y - E(Y) = X - a - E(X) + a = X - E(X)$. Donc $Var(Y) = E[(X - E(X))^2]$, qui n'est autre que $Var(X)$.

c) Par définition, $E(Y^2) = Var(Y) + (E(Y))^2 = Var(X) + (m - a)^2$ (par la question précédente). Autrement dit, $f(a) = Var(X) + (m - a)^2$. Il est alors clair que $f(a) > Var(X)$ pour tout réel $a \in \mathbb{R}$ tel que $a \neq m$.