Examen partiel du 15 mars 2013

Les documents et outils électroniques ne sont pas autorisés.
Durée : 2 heures.

Exercice 1. Les énoncés suivants sont-ils vrais ou faux ? Démontrez–les ou trouvez un contre-exemple. Les réponses non justifiées ne seront pas considérées. On munira toujours $\mathbb{R}$ et $\mathbb{R}^2$ de leurs tribus boréliennes.

a) Soit
$$\begin{array}{rccc} f: & \mathbb{R} & \to & \mathbb{R}^2 \\ & x & \mapsto & (f_1(x), f_2(x)) \end{array}$$
une fonction mesurable. Alors f_1 et f_2 sont mesurables.

b) Soit $(X, \mathcal{A}, \mu)$ un espace mesuré. Soit $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite décroissante d'éléments de $\mathcal{A}$. Alors
$$\mu(\cap_{n\in\mathbb{N}} A_n) = \lim_{n\to+\infty} \mu(A_n).$$

c) Une classe monotone est toujours une tribu.

d) Soient $(X, \mathcal{A})$ et $(Y, \mathcal{B})$ deux espaces mesurables, μ une mesure σ-finie sur X et $h : X \to Y$ une fonction mesurable. Alors la mesure image $h(\mu)$ est σ-finie.

e) Soit $f : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$ une fonction continue et intégrable pour la mesure de Lebesgue. Alors $\lim_{x\to+\infty} f(x) = 0$.

f) Soient $(X, \mathcal{A}, \mu)$ un espace mesuré et $f : X \to \mathbb{R}_+$ une fonction mesurable positive telle que $\int_X f d\mu \leq 5$. On a alors
$$\mu(\{x \in X : f(x) \geq 2\}) \leq 2,5.$$

g) Soient $(X, \mathcal{A}, \mu)$ un espace mesuré et $f : X \to \mathbb{R}_+$ une fonction mesurable positive telle que $\int_X f d\mu = 0$. Alors $f = 0$ μ-presque partout.

h) Soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de fonctions intégrables sur $\mathbb{R}^2$ telle que (f_n) tend vers 0 presque partout au sens de la mesure de Lebesgue λ_2. Alors
$$\lim_{n\to\infty} \int_{\mathbb{R}} f_n(x)\, d\lambda_2(x) = 0.$$

Solution de l'exercice 1.

a) Vrai. Nous ne le démontrerons que pour f_1, la démonstration pour f_2 étant identique. Soit B un borélien de $\mathbb{R}$. Alors $B \times \mathbb{R}$ est un borélien de $\mathbb{R}^2$ donc $f^{-1}(B \times \mathbb{R})$ est mesurable. Mais $f^{-1}(B \times \mathbb{R}) = f_1^{-1}(B)$. Ainsi, f_1 est mesurable.

b) Faux. Si on se place dans $\mathbb{R}$ muni de sa tribu borélienne et de sa mesure de Lebesgue λ, on prend la suite décroissante d'ensembles $(A_n)_{n\in\mathbb{N}} = ([n, +\infty[)_{n\in\mathbb{N}}$; alors
$$\lambda(\cap_{n\in\mathbb{N}}[n, +\infty[) = \lambda(\emptyset) = 0 \quad \text{et} \quad \lim_{n\to+\infty} \lambda([n, +\infty[) = \lim_{n\to+\infty} +\infty = +\infty.$$

c) Faux. Soit $X = \{1, 2, 3, 4\}$ un ensemble à quatre éléments. On pose :
$$\mathcal{A} = \{\emptyset, \{1, 2\}, \{2, 3\}, \{3, 4\}, \{1, 4\}, \{1, 2, 3, 4\}\} \subset \mathcal{P}(X).$$
Alors $\mathcal{A}$ est une classe monotone mais n'est pas une tribu puisque $\{1, 2\} \cup \{2, 3\}$ n'appartient pas à $\mathcal{A}$.

d) Faux. Soit h la fonction constante qui va de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ qui est constante, égale à 0. Cette fonction est borélienne et la mesure de Lebesgue λ est σ-finie mais $h(\lambda)$ est la mesure qui associe $+\infty$ tout ensemble contenant 0 et 0 à tout ensemble ne le contenant pas, ce n'est donc pas une mesure σ-finie.

e) Faux. Soit f la fonction qui, pour tout $n \in \mathbb{N}$, est l'application affine entre 0 et 1 sur $[n, n + 1/(2n^2)]$, est l'application affine entre 1 et 0 sur $[n + 1/(2n^2), n + 1/n^2]$, et s'annule partout ailleurs. Cette fonction ne tend pas vers 0, mais elle est continue et intégrable (parce que la série $\sum_{n\in\mathbb{N}^*} \frac{1}{n^2}$ converge).

f) Vrai par l'inégalité de Markov.

g) Vrai. Si $n \in \mathbb{N}^*$ et $A_n = \{x \in X : f(x) \geq 1/n\}$, en utilisant la positivité de f, on trouve comme ci-dessus

$$0 = \int_X f d\mu \geq \int_{A_n} f d\mu \geq \int_{A_n} (1/n) d\mu = \mu(A_n)/n,$$

d'où $\mu(A_n) = 0$. L'ensemble $\{x \in X : f(x) \neq 0\}$ est l'union (croissante) des A_n, donc il est aussi de mesure nulle : f est nulle presque partout.

h) Faux. Pour $n \in \mathbb{N}^*$, soit f_n la fonction qui est constante, égale à n^2 sur $]0, 1/n[^2$, et nulle partout ailleurs. Ces fonctions définissent une suite qui converge presque partout vers la fonction nulle. Cependant, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\int_{\mathbb{R}^2} f_n(x) d\lambda_2(x) = 1$.

Exercice 2. Soit $(X, \mathcal{A}, \mu)$ un espace mesuré σ-fini. On munit $\mathbb{R}_+$ de sa tribu borélienne et de sa mesure de Lebesgue λ. Soit $f : X \to \mathbb{R}_+$ une fonction mesurable et soit $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction croissante, de classe C^1, telle que $g(0) = 0$. Montrez que

$$\int_X g(f(x)) d\mu(x) = \int_0^{+\infty} g'(t) \mu\left(\{x \in X : \ f(x) \geq t\}\right) \ d\lambda(t)\,.$$

Indication : on pourra écrire $\mu\left(\{x \in X : \ f(x) \geq t\}\right)$ comme une intégrale...

Solution de l'exercice 2. Pour tout $t \in \mathbb{R}$ fixé, nous avons

$$\mu(\{x \in X/f(x) \geq t\}) = \int_X \mathbb{1}_{\{x\in X/f(x)\geq t\}} d\mu.$$

Puisque g est croissante et de classe C^1, la fonction g' est continue et positive ; de plus, l'ensemble $\{(x,t) \in X \times \mathbb{R}/f(x) \geq t\}$ est mesurable par mesurabilité de f (voir, par exemple, le premier exercice de la feuille de TD 3). Il en résulte que la fonction $(x,t) \mapsto g'(t)\mathbb{1}_{\{(x,t)/f(x)\geq t\}}$ est mesurable et positive. Donc, l'égalité précédente et le théorème de Fubini–Tonelli impliquent

$$\begin{aligned}\int_0^{+\infty} g'(t)\mu(\{x \in X/f(x) \geq t\}) d\lambda(t) &= \int_0^{+\infty} g'(t) \left(\int_X \mathbb{1}_{\{x\in X/f(x)\geq t\}} d\mu\right) d\lambda(t) = \\ &\int_X \left(\int_0^{+\infty} \mathbb{1}_{[0,f(x)]}(t) g'(t)\, d\lambda(t)\right) d\mu\,.\end{aligned} \tag{1}$$

D'autre part, par le théorème fondamental du calcul nous avons

$$\int_0^{+\infty} \mathbb{1}_{[0,f(x)]}(t) g'(t)\, d\lambda(t) = \int_0^{f(x)} g'(t)\, d\lambda(t) = g(f(x)) - g(0) = g(f(x))\,;$$

en injectant cela dans la formule (1), nous obtenons l'égalité attendue.

Exercice 3. Dans cet exercice, $\langle \cdot, \cdot \rangle$ désigne le produit scalaire canonique sur $\mathbb{R}^n$ et $\|.\|$ la norme euclidienne associée.

a) Démontrez que, pour tout $n \geq 1$,

$$\int_{\mathbb{R}^n} e^{-\|x\|^2}\,dx = \pi^{n/2},$$

(on pourra commencer par le cas $n = 2$).

b) Soit A une matrice réelle, symétrique et définie positive. En diagonalisant A, montrez qu'il existe une matrice symétrique et définie positive P telle que $\det P = \sqrt{\det A}$ et, pour tout $x \in \mathbb{R}^n$, $\langle Ax, x\rangle = \|Px\|^2$.

c) Déduisez–en que

$$\int_{\mathbb{R}^n} e^{-\langle Ax,x\rangle}\,dx = \sqrt{\frac{\pi^n}{\det A}}\,.$$

Solution de l'exercice 3.

a) Supposons d'abord $n = 2$. Dans ce cas-là, l'intégrale peut être calculée facilement, en passant en coordonnées polaires :

$$\int_{\mathbb{R}^2} e^{-\|x\|^2}dx = \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^{+\infty} d\rho\, e^{-\rho^2}\rho = -\pi\left[e^{-\rho^2}\right]_{\rho=0}^{+\infty} = \pi\,.$$

Dans le cas général, nous utilisons les propriétés de l'exponentielle et le théorème de Fubini–Tonelli pour écrire :

$$\int_{\mathbb{R}^n} e^{-\|x\|^2}dx = \int_{\mathbb{R}^n}\left(\prod_{i=1}^n e^{-x_i^2}\right)dx = \prod_{i=1}^n\left(\int_{\mathbb{R}} e^{-x_i^2}dx_i\right) = \left(\int_{\mathbb{R}} e^{-t^2}dt\right)^n\,.$$

En combinant ces deux égalités, nous déduisons l'égalité attendue.

b) Notons M^T la transposée d'une matrice M. Puisque A est symétrique, il existe une matrice spéciale orthogonale M (c'est–à–dire, $M^TM = MM^T = \mathrm{Id}$ et $\det M = 1$) telle que M^TAM soit diagonale ; de plus, les coefficients sur la diagonale de M^TAM sont les valeurs propres de A, notées $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$. Nous avons $\lambda_i > 0$ pour tout $i = 1, \ldots, n$, car A est définie positive. Définissons

$$D = \begin{bmatrix} \sqrt{\lambda_1} & 0 & & 0 \\ 0 & \sqrt{\lambda_2} & & 0 \\ & & \cdots & \\ 0 & 0 & & \sqrt{\lambda_n} \end{bmatrix}, \qquad P = MDM^T.$$

Alors P est symétrique définie positive et, comme $M^TAM = D^2$, on a $A = MD^2M^T = P^2$. Par conséquent, pour tout $x \in \mathbb{R}^n$ fixé nous obtenons

$$\langle Ax,\, x\rangle = \langle P^TPx,\, x\rangle = \langle Px,\, Px\rangle = \|Px\|^2\,.$$

De plus,

$$\det P = \det M \det D \det M^T = \sqrt{\lambda_1\lambda_2\ldots\lambda_n} = \sqrt{\det A}\,.$$

Donc P a les propriétés souhaitées.

c) D'après le point précédent, nous avons

$$\int_{\mathbb{R}^n} e^{-\langle Ax,x\rangle}dx = \int_{\mathbb{R}^n} e^{-\|Px\|^2}dx\,.$$

La matrice P est inversible, car son determinant est strictement positif. Donc l'application linéaire associée est un difféomorphisme de $\mathbb{R}^n$, de jacobien $\det P = \sqrt{\det A}$. Par le théorème de changement de variables, il en résulte que

$$\int_{\mathbb{R}^n} e^{-\|Px\|^2}dx = \frac{1}{\sqrt{\det A}}\int_{\mathbb{R}^n} e^{-\|y\|^2}dy = \sqrt{\frac{\pi^n}{\det A}}\,.$$

Exercice 4. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On munit $\mathbb{R}^n$ et $\mathbb{R}$ de leurs tribus boréliennes et de leurs mesures de Lebesgue respectives λ_n et λ_1. Etant donné $R \geq 0$, on notera $B_R = \{x \in \mathbb{R}^n : \|x\| \leq R\}$.

a) Soit $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}_+$ une fonction mesurable positive. Montrez que pour tout $R \geq 0$ et tout x dans la boule B_R, on a

$$\int_{B_R} \left\{ \int_{\frac{1}{2}}^1 f(ty + (1-t)x)\, d\lambda_1(t) \right\} d\lambda_n(y) \leq 2^{n-1} \int_{B_R} f(z) d\lambda_n(z)$$

(on pourra faire le changement de variables $z = ty + (1-t)x$).

b) Déduisez–en "l'inégalité du segment" :

$$\frac{1}{\lambda_n(B_R)^2} \int_{B_R \times B_R} \left\{ \int_0^1 f(ty + (1-t)x)\, d\lambda_1(t) \right\} d(\lambda_n \otimes \lambda_n)(x, y) \leq \frac{2^n}{\lambda_n(B_R)} \int_{B_R} f(z) d\lambda_n(z)$$

pour tout $R > 0$ (on pourra casser l'intégrale sur $[0, 1]$ en deux intégrales, sur $[0, 1/2]$ et $[1/2, 1]$, puis majorer les deux morceaux à l'aide de la première question).

Solution de l'exercice 4.

a) Par le théorème de Fubini-Tonelli, on peut intégrer dans l'ordre qu'on veut. Le changement de variables $z = ty + (1-t)x$ donne alors

$$\int_{B_R} \left\{ \int_{\frac{1}{2}}^1 f(ty + (1-t)x)\, d\lambda_1(t) \right\} d\lambda_n(y) = \int_{\frac{1}{2}}^1 \left\{ \int_{\Omega_t} f(z)\, t^{-n}\, d\lambda_n(z) \right\} d\lambda_1(t),$$

où, pour $\frac{1}{2} \leq t \leq 1$, $\Omega_t = \{ty + (1-t)x \,/\, y \in B_R\}$. Or Ω_t est inclus dan B_R, de sorte qu'avec la positivité de f, il vient

$$\int_{B_R} \left\{ \int_{\frac{1}{2}}^1 f(ty + (1-t)x)\, d\lambda_1(t) \right\} d\lambda_n(y) \leq \left(\int_{\frac{1}{2}}^1 t^{-n} d\lambda_1(t) \right) \int_{B_R} f(z)\, d\lambda_n(z).$$

En minorant t par $\frac{1}{2}$ dans la première intégrale, on obtient

$$\int_{\frac{1}{2}}^1 t^{-n} d\lambda_1(t) \leq 2^n \lambda_1([1/2, 1]) = 2^{n-1},$$

d'où le résultat.

b) Le théorème de Fubini-Tonelli permet d'ecrire

$$\begin{aligned} \int_{B_R \times B_R} \left\{ \int_0^1 f(ty + (1-t)x)\, d\lambda_1(t) \right\} dxdy &= \int_{B_R} \left(\int_{B_R} \left\{ \int_{\frac{1}{2}}^1 f(ty + (1-t)x)\, dt \right\} dy \right) dx \\ &+ \int_{B_R} \left(\int_{B_R} \left\{ \int_0^{\frac{1}{2}} f(ty + (1-t)x)\, dt \right\} dx \right) dy. \end{aligned}$$

En fait, en faisant le changement de variables $s = 1 - t$ et en permutant les rôles des variables x et y dans la seconde intégrale, on s'aperçoit qu'elle est égale à la première, d'où :

$$\int_{B_R \times B_R} \left\{ \int_0^1 f(ty + (1-t)x)\, dt \right\} dxdy = 2 \int_{B_R} \left(\int_{B_R} \left\{ \int_{\frac{1}{2}}^1 f(ty + (1-t)x)\, dt \right\} dy \right) dx.$$

La première question donne alors

$$\int_{B_R \times B_R} \left\{ \int_0^1 f(ty + (1-t)x)\, dt \right\} dxdy \leq 2 \int_{B_R} \left(2^{n-1} \int_{B_R} f(z)\, dz \right) dx = 2^n\, \lambda_n(B_R) \int_{B_R} f(z)\, dz$$

et le résultat suit, en divisant par $\lambda_n(B_R)^2$.