Partiel du 28 mars 2012

- Aucun document n'est autorisé.
- Dans un même exercice, on pourra admettre pour traiter une question les résultats des questions précédentes, même s'ils n'ont pas été démontrés.
- Durée : 2 heures.

Exercice 1. Une classe $\mathcal{C}$ de sous ensembles de Ω est une pré-classe monotone si elle est stable par union croissante (dénombrable), intersection décroissante (dénombrable) et contient Ω.

a) Une pré-classe monotone est-elle une classe monotone ? (si oui, le montrer, si non, donner un contre-exemple).

b) Montrer que pour tout sous-ensemble $\mathcal{S}$ de $\mathcal{P}(\Omega)$, on peut définir la pré-classe monotone engendrée par $\mathcal{S}$.

c) Soit $\mathcal{A}$ une classe d'ensembles. Soient $\mathcal{PM}(\mathcal{A})$ la pré-classe monotone engendrée par $\mathcal{A}$, $\mathcal{M}(\mathcal{A})$ la classe monotone engendrée par $\mathcal{A}$, et $\sigma(\mathcal{A})$ la tribu engendrée par $\mathcal{A}$. Montrer que $\mathcal{PM}(\mathcal{A}) \subset \mathcal{M}(\mathcal{A}) \subset \sigma(\mathcal{A})$.

Solution de l'exercice 1.

a) $\{\{\Omega\}\}$ est une pré-classe monotone qui n'est pas stable par différence propre.

b) On pose

$$\mathcal{PM}(\mathcal{S}) = \bigcap_{\mathcal{S}\subset\mathcal{T},\mathcal{T}\text{pré-classe monotone}} \mathcal{T}.$$

Alors, $\mathcal{PM}(\mathcal{S}) \neq \emptyset$ car $\mathcal{P}(\Omega)$ est une pré-classe monotone contenant $\mathcal{S}$, $\mathcal{PM}(\mathcal{S})$ est une pré-classe monotone car l'intersection de pré-classe monotone est une pré-classe monotone. C'est donc la petite pré-classe monotone contenant $\mathcal{S}$.

c) Une classe monotone est une préclasse monotone car stable par union croissante, contenant Ω et stable par différence propre donc stable par complémentaire et le complémentaire d'une intersection décroissante est l' union croissante des complémentaires. Une tribu est à une classe monotone.

Exercice 2. Dans cet exercice, on se propose de calculer le volume de la pseudo-sphère hyperbolique, dont voici une illustration : On définit l'application f sur $]0,+\infty[\times]0,2\pi[\times]0,+\infty[$ par

$$f(a,\theta,u) = \Big(a\frac{cos(\theta)}{ch(u)}, a\frac{sin(\theta)}{ch(u)}, a(u - th(u))\Big).$$

On définit la demi-pseudo-sphère de rayon R comme l'image par f de $[0,R]\times[0,2\pi]\times[0,+\infty[$ (pour avoir la pseudo-sphère complète, il faudrait faire varier u de $-\infty$ à $+\infty$, ce qu'on ne fait pas ici à cause du défaut de régularité de la pseudo-sphère en $u=0$.)

1. Montrer que le jacobien J_f de l'application f est égal à

$$J_f(a,\theta,u) = a^2\Big[\frac{ush(u)}{ch^3(u)} - \frac{sh^2(u)}{ch^4(u)} + \frac{1}{ch^2(u)} - \frac{1}{ch^4(u)}\Big].$$

2. i) Montrer que pour tout (a,θ,u) dans $]0,+\infty[\times]0,2\pi[\times]0,+\infty[$, $J_f(a,\theta,u) > 0$.

ii) Montrer que la fonction $g : u \mapsto (u - th(u))ch(u)$ est monotone sur $\mathbb{R}^+$.

iii) En déduire que f est un C^1-difféomorphisme de $]0,+\infty[\times]0,2\pi[\times]0,+\infty[$ sur son image.

3. En utilisant le changement de variables pseudo-sphériques défini par f, calculer le volume de la demi-pseudo-sphère de rayon R.

Solution de l'exercice 2.

a)

$$J_f(a,\theta,u) = \begin{vmatrix} \dfrac{cos(\theta)}{ch(u)} & \dfrac{-asin(\theta)}{ch(u)} & \dfrac{-acos(\theta)\ sh(u)}{ch^2(u)} \\ \dfrac{sin(\theta)}{ch(u)} & \dfrac{acos(\theta)}{ch(u)} & \dfrac{-asin(\theta)\ sh(u)}{ch^2(u)} \\ u-th(u) & 0 & a\Big(1-\dfrac{1}{ch^2(u)}\Big) \end{vmatrix} = a^2\Big[\frac{ush(u)}{ch^3(u)} - \frac{sh^2(u)}{ch^4(u)} + \frac{1}{ch^2(u)} - \frac{1}{ch^4(u)}\Big].$$

i)

$$J_f(a,\theta,u) = a^2\Big[\frac{ch^2(u)-sh^2(u)}{ch^4(u)}\frac{ush(u)}{ch^3(u)} - \frac{1}{ch^4(u)}\Big] = a^2\Big[\frac{1}{ch^2(u)} - \frac{1}{ch^4(u)} + \frac{ush(u)}{ch^3(u)}\Big]$$

Or, $ch(u)>1$ pour $u>0$, donc, $\dfrac{1}{ch^2(u)} - \dfrac{1}{ch^4(u)} > 0$, et il est clair que $\dfrac{ush(u)}{ch^3(u)} > 0$.

Ainsi, $J_f(a,\theta,u)>0$.

ii) On calcule

$$\begin{aligned} g'(u) &= \Big(1-\frac{1}{ch^2(u)}\Big)ch(u) + (u-th(u)sh(u) \\ &= ch(u) + ush(u) - \frac{1}{ch(u)} - sh^2(u)ch(u) \\ &= ch(u) + ush(u) - ch(u) \\ &= ush(u) > 0 \text{ pour } u>0. \end{aligned}$$

iii) • Il est clair que J_f est C^1
• On a montré que $J_f(a,\theta,u)\neq 0$
• Reste à montrer l'injectivité : Soient a,a',u,u',θ,θ' tels que

$$\begin{cases} \dfrac{acos(\theta)}{ch(u)} = \dfrac{a'cos(\theta')}{ch(u')} \\ \dfrac{asin(\theta)}{ch(u)} = \dfrac{a'sin(\theta')}{ch(u')} \\ a(u-th(u)) = a'(u'-th(u')) \end{cases}$$

En sommant les carrés des deux premières lignes, et en notant que $ch(u)>0$ et $a>0$, on obtient

$$\frac{a}{ch(u)} = \frac{a'}{ch(u')}$$

En divivant la troisième ligne par cette nouvelle égalité, on obtient, par injectivité de g,

$$u = u'$$

En reportant dans la dernière égalité, on a

$$a = a' \tag{1}$$

et ainsi,

$$\begin{cases} cos(\theta) = cos(\theta') \\ sin(\theta) = sin(\theta') \end{cases}$$

ce qui donne bien $\theta\equiv\theta'[2\pi]$.

b)

$$\begin{aligned}
V &= \int_{\theta=0}^{theta=2\pi} \int_{a=0}^{a=R} \int_{u=0}^{u=+\infty} J_f(a,\theta,u)dudad\theta \\
&= \int_{\theta=0}^{theta=2\pi} \int_{a=0}^{a=R} \int_{u=0}^{u=+\infty} a^2\Big[\frac{ush(u)}{ch^3(u)} - \frac{sh^2(u)}{ch^4(u)} + \frac{1}{ch^2(u)} - \frac{1}{ch^4(u)}\Big]dudad\theta \\
&= \frac{2\pi}{3}R^3 \int_{u=0}^{u=+\infty} a^2\Big[\frac{ush(u)}{ch^3(u)} - \frac{sh^2(u)}{ch^4(u)} + \frac{1}{ch^2(u)} - \frac{1}{ch^4(u)}\Big]du
\end{aligned}$$

Il y a donc 4 intégrales à calculer :

- $\displaystyle\int_0^\infty th^2(u)\frac{1}{ch^2(u)}du = -\Big[\frac{th^3(u)}{3}\Big]_0^\infty = -\frac{1}{3}$
- $\displaystyle\int_0^\infty u\frac{sh(u)}{ch^3(u)}du = \Big[-\frac{1}{2}\frac{u}{ch^2(u)}\Big]_0^\infty + \int_0^\infty \frac{1}{2ch^2(u)}du = \frac{1}{2}\Big[th(u)\Big]_0^\infty = \frac{1}{2}$
- $\displaystyle\int_0^\infty \frac{1}{ch^2(u)}du = \Big[th(u)\Big]_0^\infty = 1$
- $\displaystyle\int_0^\infty \frac{1}{ch^2(u)}du = -\frac{2}{3}$

En sommant tout, on obtient $V = \dfrac{1}{3}\pi R^3$.

Exercice 3. Soit $f \in L^1_{\mathbb{C}}(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}), \alpha)$, une fonction à valeurs complexes intégrable. On définit sa transformée de Fourier par

$$\forall x \in \mathbb{R}, \hat{f}(x) = (2\pi)^{-\frac{1}{2}} \int_{\mathbb{R}} f(t)e^{-itx}dt\,.$$

Le but de l'exercice est de démontrer une version du théorème d'inversion de Fourier :

Si $\hat{f}$ est intégrable alors $f(t) = (2\pi)^{-\frac{1}{2}} \int_{\mathbb{R}} \hat{f}(x)e^{ixt}dx$.

1. Soient $a, b \in L^1_{\mathbb{C}}(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}), \lambda)$. Montrer que la fonction $(x,y) \mapsto a(x-y)b(y)$ est une fonction intégrable sur $(\mathbb{R}^2, d\lambda_2)$. En déduire que la fonction $x \mapsto a \star b(x) = \int_{\mathbb{R}} a(x-y)b(y)dy$ est définie presque partout et est intégrable.

2. Soit $H : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ telle que $H(t) = e^{-|t|}$. Pour $\alpha > 0$ et $x \in \mathbb{R}$, on pose :

$$h_\alpha(x) = (2\pi)^{-\frac{1}{2}} \int_{\mathbb{R}} H(\alpha t)e^{itx}dt\,.$$

i) Montrer que $h_\alpha(x) = (\frac{2}{\pi})^{\frac{1}{2}} \frac{\alpha}{\alpha^2+x^2}$ et $\int_{\mathbb{R}} h_\alpha(x)dx = (2\pi)^{\frac{1}{2}}$.

ii) En déduire que si g est une fonction mesurable bornée de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{C}$ et continue en l'origine alors

$$\lim_{\alpha\to 0^+} (g \star h_\alpha)(0) = (2\pi)^{\frac{1}{2}} g(0)\,.$$

(On notera que $g \star h_\alpha$ est bien définie, puis on fera un changement de variable $y = \alpha u$).

iii) Soit $f \in L^1_{\mathbb{C}}(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}), \lambda)$, montrer que :

$$\lim_{\alpha\to 0^+} ||f \star h_\alpha - (2\pi)^{\frac{1}{2}} f||_1 = 0\,.$$

(On admettra que la fonction $y \mapsto \int_{\mathbb{R}} |f(x-y) - f(x)|dx$ est continue lorsque $f \in L^1_{\mathbb{C}}(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}), \lambda)$).

3. Soit $f \in L^1_{\mathbb{C}}(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}), \lambda)$. Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a :

$$f \star h_\alpha(x) = \int_{\mathbb{R}} H(\alpha t)\hat{f}(t)e^{ixt}dt$$

4. On suppose de plus que $\hat{f}$ est intégrable. Montrer que

$$\lim_{\alpha \to 0^+} \int_{\mathbb{R}} H(\alpha t)\hat{f}(t)e^{ixt}dt = \int_{\mathbb{R}} \hat{f}(t)e^{ixt}dt\,.$$

En déduire le théorème d'inversion de Fourier.

Solution de l'exercice 3.

1. On a

$$\int_{\mathbb{R}^2} |a(x-y)b(y)|dxdy = \int_{\mathbb{R}_y} |b(y)| \left(\int_{R_x} |a(x-y)|dx \right) dy = \int_{\mathbb{R}_y} |b(y)| ||a||_1 dy = ||a||_1 ||b||_1 < +\infty\,.$$

On conclut par le théorème de Fubini.

2. i)

$$h_\alpha(x) = (2\pi)^{-\frac{1}{2}} \int_{]-\infty,0]} e^{\alpha t + itx}dt + (2\pi)^{-\frac{1}{2}} \int_{]-\infty,0]} e^{-\alpha t + itx}dt = (2\pi)^{-\frac{1}{2}} [\frac{1}{\alpha + ix} - \frac{1}{-\alpha + ix} = (2\pi)^{-\frac{1}{2}} \frac{2\alpha}{x^2 + \alpha^2}\,.$$

De plus $\int_{\mathbb{R}} (\frac{2}{\pi})^{\frac{1}{2}} \frac{\alpha}{x^2+\alpha^2} dx = (\frac{2}{\pi})^{\frac{1}{2}} \pi$.

ii) Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $|g(x-y)h_\alpha(y)| \leq ||g||_\infty |h_\alpha(y)|$ est une fonction intégrable. Donc $g \star h_\alpha(x) = \int_{\mathbb{R}} g(x-y)h_\alpha(y)dy$ est bien définie. De plus

$$g \star h_\alpha(0) = (\frac{2}{\pi})^{\frac{1}{2}} \int_{\mathbb{R}} g(-y) \frac{\alpha}{\alpha^2 + y^2} dy = (\frac{2}{\pi})^{\frac{1}{2}} \int_{\mathbb{R}} g(-\alpha u) \frac{\alpha^2}{\alpha^2 + \alpha^2 u^2} du\,.$$

Comme $|g(\alpha u)\frac{1}{1+u^2}| \leq ||g||_\infty \frac{1}{1+u^2}$ et $\lim_{\alpha \to 0^+} g(\alpha u)\frac{1}{1+u^2} = g(0)\frac{1}{1+u^2}$ car g est continue en l'origine, le théorème de convergence dominée permet de conclure :

$$\lim_{\alpha \to 0^+} (g \star h_\alpha)(0) = (\frac{2}{\pi})^{\frac{1}{2}} \int_{\mathbb{R}} g(0) \frac{1}{1+u^2} du = g(0)(2\pi)^{\frac{1}{2}}\,.$$

iii) On rappelle que $\int_{\mathbb{R}} h_\alpha(x)dx = (2\pi)^{\frac{1}{2}}$. Donc

$$||f \star h_\alpha - (2\pi)^{\frac{1}{2}} f||_1 = \int_{\mathbb{R}} | \int_{\mathbb{R}} f(x-y)h_\alpha(y)dy - \int_y f(x)h_\alpha(y)dy|dx \leq \int_{\mathbb{R}^2} h_\alpha(y)|f(x-y) - f(x)|dxdy$$

$$= \int_{\mathbb{R}} h_\alpha(y) \left(\int_{\mathbb{R}} |f(x-y) - f(x)|dx \right) dy = g \star h_\alpha(0)$$

avec $g(y) = \int_{\mathbb{R}} |f(x-y) - f(x)|dx$. Admettant que g est continue, on a d'aprés la question précédente

$$\lim_{\alpha \to 0^+} ||f \star h_\alpha - (2\pi)^{\frac{1}{2}} f||_1 = \lim_{\alpha \to 0^+} |g \star h_\alpha(0) - g(0)| = 0\,.$$

3. On a $f \star h_\alpha(x) = \int_{\mathbb{R}} f(x-y) \left(\int_{t \in \mathbb{R}} H_\alpha(t) e^{iyt} dt \right) dx$. On vérifie que la fonction $(y,t) \mapsto f(x-y)H_\alpha(t)e^{iyt}$ est intégrable sur $\mathbb{R}^2$. Donc

$$f \star h_\alpha(x) = \int_{\mathbb{R}^2} f(x-y)e^{-it(x-y)} e^{itx} H(\alpha t) dtdy = \int_{t \in \mathbb{R}} e^{itx} H(\alpha t) \left(\int_{y \in \mathbb{R}} f(x-y) e^{-it(x-y)} dy \right) dt$$

$$= \int_{t \in \mathbb{R}} e^{itx} H(\alpha t) \left(\int_{y \in \mathbb{R}} f(u) e^{-itu} du \right) dt\,.$$

Ce qui est la formule demandée.

4. Supposons maintenant $\hat{f}$ intégrable, on a $|H(\alpha t)\hat{f}(t)| \leq |\hat{f}(t)|$ et $\lim_{\alpha\to 0^+} H(\alpha t)\hat{f}(t) = \hat{f}(t)$ $\lambda-$pp. Le théorème de convergence dominée permet de conclure que

$$\lim_{\alpha\to 0^+} \int_{\mathbb{R}} H(\alpha t)\hat{f}(t)e^{ixt}dt = \int_{\mathbb{R}} \hat{f}(t)e^{ixt}dt\,.$$

Notons $\tilde{f}_\alpha(x) = \int_{\mathbb{R}} H(\alpha t)\hat{f}(t)e^{ixt}dt$ et $\tilde{f} = \tilde{f}_0$. Le lemme de Fatou donne

$$\int_R |\tilde{f}(x) - f(x)|dx = \int_{\mathbb{R}} \lim_{\alpha\to 0^+} |\tilde{f}_\alpha(x) - f(x)|dx \leq \liminf_{\alpha\to 0^+} \int_{\mathbb{R}} |\tilde{f}_\alpha(x) - f(x)|dx\,.$$

Mais $\tilde{f}_\alpha = f \star h_\alpha$ donc

$$||\tilde{f} - f||_1 \leq \liminf_{\alpha\to 0^+} ||f \star h_\alpha - f||_1 = 0$$

d'après la question (2.*iii*).