Examen - 2ème session.

Documents, calculatrices et téléphones portables interdits.
On veillera au soin et à la clarté de la rédaction.

1) Variables discrètes

a) Si une variable X peut prendre les valeurs $\{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$ avec les probabilités respectives $\{p_1, p_2, \ldots, p_n\}$, donner l'expression de l'espérance et de la variance de X.

b) On suppose que X et Y sont indépendantes et de même loi avec $\mathbb{P}(X = 4) = \mathbb{P}(X = 5) = \mathbb{P}(X = 6) = 1/3$. Calculer l'espérance et la variance de
1) X,
2) $X + Y$,
3) $X - Y$,
4) $2X + 3Y$.

c) Un billet de loterie coute 1 Euro et donne une chance sur 50 de gagner 10 Euros et une chance sur 5000 de gagner 1000 Euros. Si X désigne le gain réalisé, évaluer $\mathbb{E}(X)$.

2) Des lois de Poisson Soit $\mu > 0$ et soit Z une variable de loi de Poisson de paramètre μ (on écrit $Z \sim \mathcal{P}(\mu)$) de sorte que

$$\mathbb{P}(Z = k) = \frac{\mu^k}{k!} e^{-\mu}, \qquad (k = 0, 1, 2, \ldots)$$

On suppose aussi que $X_0, X_1, \ldots$ est une suite de variables aléatoires indépendantes telles que pour chaque $i \geq 0$ $X_i \sim \mathcal{P}(\lambda_i)$ avec

$$\lambda_i := \frac{\mu}{3} \left(\frac{2}{3}\right)^i.$$

a) Calculer la fonction génératrice de Z

$$g(\theta) := \mathbb{E}[\theta^Z] = \sum_{k=0}^{\infty} \mathbb{P}(Z = k)\theta^k, \theta \in [0, 1]$$

b) Calculer la fonction génératrice de X_i, $g_i(\theta) = \mathbb{E}[\theta^{X_i}]$ pour chaque $i \geq 0$.

c) On définit $Y_n := \sum_{i=1}^n X_i$. Donner la fonction génératrice de Y_n, $h_n(\theta) := \mathbb{E}[\theta^{Y_n}]$. En déduire que que Y_n est une variable de Poisson et donner son paramètre.

d) Pour $\theta \in [0,1]$, montrer que $h_n(\theta) \to e^{\mu(\theta-1)}$ quand $n \to \infty$. En déduire que pour chaque $k = 0, 1, 2 \dots$

$$\mathbb{P}(Y_n = k) \to \frac{\mu^k}{k!} e^{-\mu}, \qquad n \to \infty$$

en ayant soin de rappeler tout résultat général que vous auriez besoin d'utiliser.

e) On pose $Y := \sum_{i=0}^{\infty} X_i$. On rappelle que si $A_1, A_2, \dots$ sont des évènements tels que $A_{n+1} \subseteq A_n$ pour chaque n alors $\mathbb{P}(A_n) \searrow \mathbb{P}(\cap_n A_n)$. Prouver que

$$\mathbb{P}(Y_n \leq k) \searrow \mathbb{P}(Y \leq k)$$

et en déduire que $Y \sim \mathcal{P}(\mu)$.

f) En déduire que $Y - Y_n \sim \mathcal{P}(\gamma_n)$ pour un certain paramètre γ_n que vous devez calculer. En déduire que

i) $\mathbb{E}[|Y - Y_n|] \to 0$ quand $n \to \infty$

ii) pour tout $\epsilon > 0, \mathbb{P}(|Y - Y_n| > \epsilon) \to 0$ quand $n \to \infty$.

Quels modes de convergence de $Y - n$ vers Y venez vous de prouver ?

g) En prennent soin de rappeler tout résultat général que vous pourriez avoir besoin d'utiliser, montrer qu'avec probabilité 1, seuls un nombre fini d'évènements $\{X_0 \geq 1\}, \{X_1 \geq 1\}, \{X_2 \geq 1\}, \dots$ se réalisent. En déduire que $Y_n \to Y$ presque sûrement, c'est-à-dire que $\mathbb{P}(Y_n \to Y) = 1$.

3) Des uniformes Soit $U_1, U_2, \dots, U_n$ des variables aléatoires indépendantes uniformes sur $[0,1]$.

a) Donner la fonction de répartition et la densité de $\max(U_1, U_2)$

b) Même question pour $\max(U_1, U_2, \dots, U_n)$.

c) Démonter que $-\ln U_1$ suit une loi exponentielle de paramètre 1.

d) Donner la densité et la fonction de répartition de $U_1 + U_2$.

4) Limite centrale Soit $(X_i)_{i=1}$ des variables aléatoires indépendantes de Bernoulli de paramètre $p \in]0,1[$.

a) Rappeler la moyenne et la variance de X_i.

b) Quelle est la conclusion du théorème centrale limite en ce qui concerne les variables X_i.

c) On suppose que l'on joue 100 fois à pile ou face avec une pièce dont on veut tester si elle est équilibrée. On suppose donc que $p = 1/2$ et on appelle X le nombre de résultats "pile". On décide que la pièce n'est pas équilibrée si X prends une valeur trop improbable. Trouver le plus petit $n \in \mathbb{N}$ tel que

$$\mathbb{P}(50 - n \leq X \leq 50 + n) \geq 95\%$$

On rappelle que si Z suit une loi Normale centrée réduite sa fonction de répartition $\phi(x)$ vérifie

$$1-\phi(1,96) \equiv 2,5\%,\ 1-\phi(1,6449) \equiv 5\%,\ 1-\phi(1,2816) \equiv 10\%.$$

d) On obtient $X = 61$. La pièce est-elle équilibrée ?