Université Pierre et Marie Curie 2012-2013
Probabilités et statistiques - LM345

Examen - 1ère Session.

Documents et calculatrices interdits

Dans tout l'examen on travaille sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathscr{F}, \mathbb{P})$.

1. Questions de cours :

a) Calculer $\limsup A_n$ et $\liminf A_n$ si $\Omega = \mathbb{R}$ muni de la tribu borélienne et $\forall n \in \mathbb{N}$: $A_n := [-1/n; 2 + (-1)^n[$.

b) Démontrer l'inégalité de Markov $\mathbb{P}(|X| \geq a) \leq \mathbb{E}[|X|]/a$ (où $a > 0$ et $X : (\Omega, \mathscr{F}, \mathbb{P}) \mapsto \mathbb{R}$ est une variable aléatoire réelle).

c) Est ce que l'égalité $\mathbb{E}(1/X) = 1/\mathbb{E}(X)$ est vraie en général ? Jamais ?

Solution de l'exercice 1.

a) $\limsup A_n = [0, 3[, \liminf A_n = [0, 1[$

b) Comme $X \geq a\mathbf{1}_{\{X \geq a\}}$ on a $\mathbb{E}(X) \geq a\mathbb{E}[\mathbf{1}_{\{X \geq a\}}]$ d'où l'égalité demandée.

c) Cette égalité n'est pas vraie en général (prendre le cas $\mathbb{P}(X = 1) = \mathbb{P}(X = 2) = 1/2$) mais est valable si X est une constante non-nulle par exemple.

2. Variables discrètes : Soit X et Y deux variables indépendantes à valeur dans $\mathbb{N}$ de lois respectives Poisson de paramètre $\lambda > 0$ et Poisson de paramètre $\mu > 0$.

a) Rappeler l'expression de $\mathbb{P}(X = k), k = 0, 1, \ldots$

b) Rappeler l'expression de la fonction génératrice de la loi de Poisson, i.e. $g_X(s) := \mathbb{E}(s^X), s \in [0, 1]$.

c) Donner la loi de $X + Y$. Justifier votre réponse.

d) Soit N une variable de loi géométrique de paramètre p. Rappeler sa distribution et sa fonction génératrice.

e) Donner la fonction génératrice de $Z := \sum_{i=1}^{N} X_i$ pù les X_i sont des variables indépendantes et identiquement distribuées de loi de Poisson de paramètre $\lambda > 0$.

Solution de l'exercice 2.

a) $\mathbb{P}(X = k) = e^{-\lambda}\frac{\lambda^k}{k!}$.

b) $g_X(s) = e^{\lambda(s-1)}$.

c) Si X et Y sont indépendantes on sait que $g_{X+Y}(s) = g_X(s)g_Y(s)$ donc $g_{X+Y}(s) = e^{(\lambda+\mu)(s-1)}$ Il s'agit donc d'une loi de Poisson de paramètre $\lambda + \mu$.

d) On a $\mathbb{P}(N=k)=(1-p)p^k, k=0,1,\ldots$ et $g_X(s)=\frac{1-p}{1-sp}$. (on retrouve facilement se résultat si l'on se souvient de $\sum_{k=0}^{\infty} x^k=\frac{1}{1-x}$)

e)

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}[s^Z] &= \sum_{n=0,1,2,\ldots} \mathbb{E}(s^Z \cap N=n) \\
&= \sum_{n=0,1,2,\ldots} \mathbb{E}(s^Z | N=n)\mathbb{P}(N=n) \\
&= \sum_{n=0,1,2,\ldots} e^{n\lambda(s-1)}\mathbb{P}(N=n) \\
&= (1-p) \sum_{n=0,1,2,\ldots} (pe^{\lambda(s-1)})^n \\
&= \frac{1-p}{1-pe^{\lambda(s-1)}}.
\end{aligned}$$

3. Une loi faible : Soit $(X_2, X_3, \ldots)$ une suite de variables aléatoires indépendantes telles que

$$\mathbb{P}(X_n=n)=\mathbb{P}(X_n=-n)=\frac{1}{2n\log n}, \mathbb{P}(X_n=0)=1-\frac{1}{n\log n}.$$

On pose $S_n=\sum_{i=2}^n X_i$ et on va montrer que cette suite vérifie une loi faible des grands nombres mais pas une loi forte.

- Montrer que $\sum_{i\geq 2}^n \frac{i}{\log i} \leq \frac{n^2}{\log n}$.
- Montrer que $S_n/n \to 0$ en probabilité. On pourra commencer par montrer que la convergence a lieu dans L^2 (i.e que $\mathbb{E}[(S_n/n)^2] \to 0$).
- Montrer que l'évènement $\{|X_i| \geq i\}$ se réalise infiniment souvent.
- En déduire que S_n/n ne peut pas converger presque sûrement.

Solution de l'exercice 3.

a) Comme $x \mapsto x/\ln x$ est croissante pour $x \geq e$ on voit que pour tout $2 \leq i \leq n$ on a $i/\ln i \leq n/\ln n$ d'où $\sum_{i=2}^n \frac{i}{\ln i} \leq (n-1)\frac{n}{\ln n} \leq \frac{n^2}{\ln n}$.

b) $\mathbb{E}[(S_n/n)^2] = \frac{1}{n^2}\mathbb{E}(S_n^2)$. Comme $\mathbb{E}(X_i, X_j)=0$ quand $i \neq j$ et que $\mathbb{E}(X_i^2)=i^2/(i\ln i)=i/\ln i$ on a $\mathbb{E}(S_n^2)=\sum_{i=2}^{\infty}\frac{i}{\ln i}$ et donc

$$\mathbb{E}[(S_n/n)^2] \leq \frac{1}{\ln n} \to 0.$$

La convergence L^2 implique la convergence en probabilité.

c) Soit $A_i=\{|X_i| \geq i\}$. On a $\mathbb{P}(A_n)=\frac{1}{2n\log n}$ et donc $\sum_n \mathbb{P}(A_n)=\infty$. Comme les A_n sont indépendants, on en déduit par Borel-Cantelli que les A_n se produisent infiniment souvent.

d) On voit donc que S_n/n ne peut converger presque sûrement car comme la convergence p.s. implique la convergence en probabilité et que l'on sait que $S_n/n \to 0$ en probabilité, la seule limite presque sûre possible pour S_n/n est 0, or S_n/n est infiniment souvent à distance 1 de 0 par la question précédente et ne converge donc pas presque sûrement vers 0.

4. Couple de variables : Soit (X, Y) un couple de variables de densité conjointes :

$$\begin{cases} f(x,y) = 2e^{-(x+y)}, \text{ si } 0 \leq x \leq y, \\ f(x,y) = 0 \text{ sinon.} \end{cases}$$

— Montrer que f définit bien une densité de probabilité.
— Déterminer la région minimale Δ du plan telle que $\mathbb{P}((X,Y) \in \Delta) = 1$.
— Déterminer les densités marginales de X et Y.
— Les variables X et Y sont-elles indépendantes ?
— Calculer $\mathbb{E}(XY)$ et $\mathrm{Cov}(X,Y)$.

Solution de l'exercice 4.

a)

$$\begin{aligned} \int\int dxdy 2e^{-(x+y)} \mathbf{1}_{\{0 \leq x \leq y\}} &= 2\int_0^\infty dy e^{-y} \int_0^y dx e^{-x} \\ &= 2\int_0^\infty dy e^{-y}(1-e^{-y}) = 2 - 1 = 1 \end{aligned}$$

c'est donc bien une densité de probabilité.

b) Le support de la mesure de densité $f(x,y)$ est $\Delta = \{(x,y) : 0 \leq x \leq y\}$ (i.e. la région du quadrant supérieur droit situé au dessus de la première bissectrice).

c) $f_X(x) = \int dy f(x,y) = 2e^{-x} \int_x^\infty dy e^{-y} = 2e^{-2x}$. et $f_Y(y) = \int dx f(x,y) = 2e^{-y}(1 - e^{-y})$.

d) Non par exemple $P(X > 1, Y < 1) = 0 \neq P(X > 1)P(Y < 1) > 0$.

e)

$$\begin{aligned} \mathbb{E}(XY) &= 2\int_0^\infty dy y e^{-y} \int_0^y dx x e^{-x} \\ &= 2\int_0^\infty dy y e^{-y}(1 - ye^{-y} - e^{-y}) \\ &= 2(1 - 1/4 - 1/4) = 1. \end{aligned}$$

(on vérifie facilement que $\int_0^\infty ye^{-2y}dy = \int_0^\infty y^2 e^{-2y} dy = 1/4$ en se rappelant qu'il s'agit de quantités reliées au premier et second moment de la loi exponentielle de paramètre 2).

5. Théorème de la limite centrale : Un joueur entre dans un casino où on lui propose le jeux suivant. Il doit jouer à pile ou face avec une pièce équilibrée dix-milles fois de suite. la mise de départ est de 100 Euros. S'il obtient "face" plus de 5150 fois il gagne deux milles Euros. Sinon il perd sa mise.

a) Estimer la probabilité que le joueur gagne.

b) Pensez-vous que ce jeux avantage le casino ou le joueur ? Quel devrait être la gain proposé par le casino pour que le jeux soit équilibré.

x	1	1.2	1.4	1.6	1.8	2	2.4	2.8	3	3.4
$\Phi(x)$	0.841	0.885	0.919	0.945	0.964	0.977	0.992	0.9974	0.9987	0.9997

Solution de l'exercice 5.

a) Notons N le nombre de fois où le joueur obtient "face". On a $N = \sum_{i=1}^n X_i$ où $n = 10000$ et X_i vaut 1 si le $i$ème tirage est "face" et 0 sinon. Les X_i sont iid de loi de Bernoulli de paramètre 1/2/

$$\mathbb{P}(N > 5150) = \mathbb{P}(\sum_1^n X_i - n \times 1/2 > 5150 - 5000) = \mathbb{P}\left(\frac{N - n/2}{\sqrt{n}} > 150/100\right).$$

D'après le théorème de la limite centrale $\frac{N-n/2}{\sqrt{n}}$ suit approximativement une loi normale centrée de variance la variance de X_1 c'est-à-dire 1/4. Donc

$$\mathbb{P}\left(\frac{N - n/2}{\sqrt{n}} > 150/100\right) = \mathbb{P}\left(\frac{N - n/2}{\frac{1}{2}\sqrt{n}} > 3\right) \approx 1 - \phi(3) \approx 0,13\%.$$

b) L'espérance de gain du joueur est donc de $0,13\% \times 2000 - 0,9987 \times 100 = -97,27$ et est négative. Le jeux est très favorable au casino. Le gain G devrait être tel que

$$0,13\% \times G - 0,9987 \times 100 = 0$$

soit $G \approx 76823$.

Barème indicatif :

1) 15 pts

2) 20 pts

3) 15 pts

4) 15 pts

5) 15 pts