Contrôle continu 1

Cours de probabilité LM345 - Durée : une heure

Responsable du cours : M. Thieullen - Responsable du TD 2 : J. Berestycki

Aucun document autorisé

Question de cours

Rappeler la définition d'une tribu et montrer que si $\mathcal{F}$ est une tribu et $A, B \in \mathcal{F}$ alors $A \cap B \in \mathcal{F}$.

solution : $A, B \in \mathcal{F} \Rightarrow A^c, B^c \in \mathcal{F} \Rightarrow A^c \cup B^c \in \mathcal{F} \Rightarrow (A^c \cup B^c)^c \in \mathcal{F}$ mais $(A^c \cup B^c)^c = A \cap B$ cqfd.

Exercice 1

Un probabiliste joue deux fois de suite à pile ou face. Soit X le nombre de "pile" obtenus. Il jette ensuite X dés à 6 faces. On décide d'appeler Y la somme des résultats obtenus.

1. Quel espace Ω choisissez-vous pour modéliser cette expérience ?
2. Calculer $E(Y)$ et $Var(Y)$. Donnez la loi de Y.

solution On prend $\Omega = \{0, 1, 2, \dots, 12\}$ (ensemble des résultats possibles). Soit p_k la probabilité d'obtenir k en jetant un dé et q_k la probabilité d'obtenir k en jetant 2 dés. On a $P(Y = 0) = 1/4$ et pour $k > 0, P(Y = k) = p_k/2 + q_k/4$ avec $p_k = 1/6$ si $k \in \{1, \dots, 6\}$ et $q_k = \min(k-1, 12-k+1)/36$ si $k \in \{2, \dots, 12\}$. Calculons $E(Y) = \sum_{k=1}^{12} kP(Y = k)$. Si on jette un dé l'espérance du résultat est $7/2$ donc si on jette deux dés l'espérance est 7. Donc pour Y on a

$$E(Y) = \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{6} kp_k + \frac{1}{4}\sum_{k=2}^{12} kq_k = \frac{1}{2}\frac{7}{2} + \frac{1}{4}7 = \frac{7}{2}.$$

Il n'y avait pas besoins de faire plus de calculs ! De même on a

$$\begin{aligned}
E(Y^2) &= \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{6} k^2 p_k + \frac{1}{4}\sum_{k=2}^{12} k^2 q_k \\
&= \frac{1}{2}\frac{1}{6}\sum_{k=1}^{6} k^2 + \frac{1}{4}\frac{1}{36}\sum_{i=1}^{6}\sum_{j=1}^{6}(i+j)^2 \\
&= \frac{1}{2}\frac{1}{6}91 + \frac{1}{4}\frac{1}{36}\left(6 * (\sum_{i=1}^{6} i^2 + \sum_{j=1}^{6} j^2) + 2 * \sum_{i=1}^{6}\sum_{j=1}^{6} ij\right) \\
&= \frac{1}{2}\frac{1}{6}91 + \frac{1}{4}\frac{1}{36}\left(6 * (91 + 91) + 2 * \sum_{i=1}^{6} i * 21\right) \\
&= \frac{1}{2}\frac{1}{6}91 + \frac{1}{4}\frac{1}{36}\left(6 * (91 + 91) + 2 * 21^2\right) \\
&= 26,5641
\end{aligned}$$

et donc $Var(Y) = E(Y^2) - E(Y)^2 = 26,5641 - (7/2)^2 = 14.31$.

Exercice 2

Soit X une variable aléatoire de Poisson de paramètre $\lambda \geq 0$ (sur un espace $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$). On rappelle que

$$\forall k \in \mathbb{N} : P[X = k] = e^{-\lambda} \frac{\lambda^k}{k!}.$$

1. Calculer l'expression de g, la fonction génératrice de X.

2. Calculer $E(X^2)$.

solution $g(s) = E(s^X) = \sum_k e^{-\lambda} \frac{\lambda^k}{k!} s^k = \exp(\lambda(s-1))$. On a $E(X(X-1)) = g''(1) = \lambda^2$ et donc $E(X^2) = \lambda^2 + E(X) = \lambda^2 + \lambda$.

Exercice 3

Soient $\lambda \geq 0$ et $\alpha \in]0, 1[$. On définit sur $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ la fonction

$$f(i, j) = \alpha e^{-\lambda} (1 - \alpha)^i \frac{\lambda^j}{j!}.$$

1. Montrer que $P(\{(i, j)\}) = f(i, j)$ définit bien une mesure de probabilité sur $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$.

2. On note X (resp. Y) la première (resp. seconde) projection de $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ sur $\mathbb{N}$,

   (a) Déterminer les lois de X et de Y

   (b) Calculer $P(X = Y)$.

solution Il suffit de vérifier que $\sum_{i,j} f(i, j) = 1$. X suit une loi géométrique de paramètre α et Y suit une loi de Poisson de paramètre λ. On a $P(X = Y) = \sum_k f(k, k) = \alpha e^{-\alpha\lambda}$.