TD9. Convergence en loi.

1. Supposons que $\mathbb{E}[X^2] = 1$ et $\mathbb{E}[X^4] \leq K < \infty$. Montrer que pour chaque $y < 1$ il existe une constante $c_{y,K} > 0$ telle que $\mathbb{P}[|X| > y] \geq c_{y,K}$.

Solution de l'exercice 1. Cauchy-Schwartz inequality implies that

$$\left(\mathbb{E}[X^2 1_{\{|X|>y\}}]\right)^2 \leq \mathbb{E}[X^4]\mathbb{P}[|X| > y] \leq K\mathbb{P}[|X| > y].$$

Further, we have

$$\mathbb{E}[X^2 1_{\{|X|>y\}}] = \mathbb{E}[X^2] - \mathbb{E}[X^2 1_{\{|X|\leq y\}}] \geq 1 - y^2.$$

Therefore we have $\mathbb{P}[|X| > y] \geq \frac{(1-y^2)^2}{K}$.

2. Soient Y_n une suite de variables aléatoires. Supposons que $\mathbb{E}[Y_n] \to 1$ et $\mathbb{E}[Y_n^2] \to 1$. Montrer que $Y_n \to 1$ en loi.

Solution de l'exercice 2. By Chebyshev inequality, we have

$$\mathbb{P}\big[|Y_n - \mathbb{E}[Y_n]| > \epsilon\big] \leq \frac{\mathbb{E}[Y_n^2] - (\mathbb{E}[Y_n])^2}{\epsilon^2} \to 0.$$

Therefore, $Y_n - \mathbb{E}[Y_n] \to 0$ in probability, and thus $Y_n \to 1$ in probability.

3. Soient $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de variables aléatoires réelles définies sur un espace $(\Omega, \mathscr{F}, \mathbb{P})$ et f une application continue de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. On suppose que $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge en loi vers une variable aléatoire X.

Montrer que la suite $(f(X_n))_{n\in\mathbb{N}}$ converge en loi vers $f(X)$.

Solution de l'exercice 3. Tout d'abord, $f(X_n)$ est bien une variable aléatoire comme composée de la variable aléatoire X_n et de l'application f qui est continue. Si φ est une application de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ continue bornée, remarquons que $\varphi \circ f$ est également continue bornée. L'hypothèse de convergence en loi de la suite $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ vers X implique $\lim \mathbb{E}[\varphi \circ f(X_n)] = \mathbb{E}[\varphi \circ f(X)]$ que l'on peut écrire $\lim \mathbb{E}[\varphi(f(X_n))] = \mathbb{E}[\varphi(f(X))]$. Ceci étant valable pour toute φ continue bornée, $(f(X_n))_{n\in\mathbb{N}}$ converge en loi vers $f(X)$.

4. a. Soit $(X_n)_{n\geq 1}$ une suite de variables aléatoires réelles qui converge en loi vers une variable aléatoire réelle constante a. Montrer que la convergence a lieu aussi en probabilité.

b. Soit $(X_n)_{n\geq 1}$ une suite indépendante de variables aléatoires réelles de même loi de Cauchy de paramètre 1. Soit $S_n = \sum_{k=1}^n X_k$. Etudier les convergences en probabilité et en loi des suites $(\frac{1}{\sqrt{n}}S_n)_{n\geq 1}$, $(\frac{1}{n}S_n)_{n\geq 1}$ et $(\frac{1}{n^2}S_n)_{n\geq 1}$.

Indication : la fonction caractéristique de la loi de Cauchy est donnée par $\phi(t) = e^{-|t|}$.

Solution de l'exercice 4. a. Soit $\varepsilon > 0$ et f_ε définie par $f_\varepsilon(x) = \mathbb{1}_{]a-\varepsilon,a+\varepsilon[^c}(x) + \frac{1}{\varepsilon}|x - a|\mathbb{1}_{]a-\varepsilon,a+\varepsilon[}$. Cette fonction est continue bornée, donc la suite $(\mathbb{E}[f_\varepsilon(X_n)])_{n\geq 1}$ converge vers $\mathbb{E}[f_\varepsilon(a)] = 0$. Comme

$$\mathbb{P}(|X_n - a \geq \varepsilon|) = \mathbb{E}[\mathbb{1}_{]a-\varepsilon,a+\varepsilon[^c}(X_n)] \leq \mathbb{E}[f_\varepsilon(X_n)],$$

$(X_n)_{n\geq 1}$ converge en probabilité vers a.

b. La fonction caractéristique de $\frac{1}{\sqrt{n}}S_n$ est donnée par

$$\phi(t) = \mathbb{E}[e^{\frac{it}{\sqrt{n}}S_n}] = \left(\mathbb{E}[e^{\frac{it}{\sqrt{n}}X_1}]\right)^n = e^{-|t|\sqrt{n}},$$

car les X_n sont indépendantes. Comme la suite $\left(e^{-|t|\sqrt{n}}\right)_{n\geq 1}$ tend vers $1_{\{0\}}(t)$ qui définit une application non continue en 0. Donc la limite des fonctions caractéristiques n'est pas une fonction caractéristique, et $(\frac{1}{\sqrt{n}}S_n)_{n\geq 1}$ ne converge ni en loi, ni en probabilité.

La fonction caractéristique de $\frac{1}{n}S_n$ est $\phi(t) = e^{-|t|}$. La suite $(\frac{1}{n}S_n)_{n\geq 1}$ converge donc en loi vers une variable aléatoire de loi de Cauchy. Mais elle ne converge pas en probabilité. En effet, sinon, la suite $(\frac{S_n}{n} - \frac{S_{2n}}{2n})_{n\geq 1}$ convergerait en probabilité, donc aussi en loi, vers 0. Or, la fonction caractéristique de $\frac{S_n}{n} - \frac{S_{2n}}{2n}$ est donnée par $\phi(t) = \mathbb{E}[e^{\frac{it}{2n}(X_1+\cdots+X_n-(X_{n+1}+\cdots+X_{2n}))}] = e^{-|t|}$, qui ne converge pas vers 1, fonction caractéristique de la variable aléatoire 0.

La fonction caractéristique de $\frac{1}{n^2}S_n$ est $\phi(t) = e^{-\frac{|t|}{n}}$ qui converge vers 1. Ainsi, la suite $(\frac{1}{n^2}S_n)_{n\geq 1}$ converge en loi et donc en probabilité vers 0.

5. Soient X une variable aléatoire réelle, $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(Y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ deux suites de v.a.r.

a. Montrer que pour tout $t \in \mathbb{R}$, $a > 0$ et $n \in \mathbb{N}$,

$$|\phi_{X_n+Y_n}(t) - \phi_{X_n}(t)| \leq 2\mathbb{P}(|Y_n| > a) + \mathbb{E}[\mathbb{1}_{]-\infty,a]}(|Y_n|)|e^{itY_n} - 1|].$$

b. Montrer que si $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge en loi vers X et $(Y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge en loi vers 0, alors la suite $(X_n + Y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge en loi vers X.

c. Montrer que la convergence en loi de $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ vers X n'implique pas la convergence en loi de $(X_n - X)_{n\in\mathbb{N}}$ vers 0.

Solution de l'exercice 5.

a) Pour tous $t \in \mathbb{R}$, $a > 0$ et $n \in \mathbb{N}$,

$$\begin{aligned}
|\phi_{X_n+Y_n}(t) - \phi_{X_n}(t)| &= |\mathbb{E}[e^{itX_n}(e^{itY_n} - 1)]| \leq \mathbb{E}[|e^{itY_n} - 1|] \\
&= \int_{\{|Y_n|>a\}} |e^{itY_n} - 1| d\mathbb{P} + \int_{\{|Y_n|\leq a\}} |e^{itY_n} - 1| d\mathbb{P} \\
&\leq 2\mathbb{P}(|Y_n| > a) + \int_{\{|Y_n|\leq a\}} |e^{itY_n} - 1| d\mathbb{P}
\end{aligned}$$

b) En fait, Y_n converge en probabilité vers 0. Soit $\varepsilon > 0$. Il existe $a_0 > 0$ tel que pour $y \leq a_0$, $|e^{it} - 1| \leq \varepsilon$. De plus, il existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $n \geq n_0$, $\mathbb{P}(|Y_n| > a_0) \leq \varepsilon$. Donc, $|\phi_{X_n+Y_n}(t) - \phi_{X_n}(t)| \leq 3\varepsilon$. La convergence en loi de $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ vers X implique qu'il existe n_1 (que l'on peut prendre plus grand que n_0), tel que, pour tout $n \geq n_1$, $|\phi_{X_n}(t) - \phi_X(t)| \leq \varepsilon$. On a montré que pour tout $n \geq n_1$, $|\phi_{X_n+Y_n}(t) - \phi_X(t)| \leq 4\varepsilon$ d'où la convergence en loi demandée.

Pour éviter les ϵ on peut utiliser la notion de limite supérieure. Pour tout a positif on a :

$$\begin{aligned}
\mid \phi_{X_n+Y_n}(t) - \phi_X(t) \mid &\leq \mid \phi_{X_n+Y_n}(t) - \phi_{X_n}(t) \mid + \mid \phi_{X_n}(t) - \phi_X(t) \mid \\
&\leq 2\mathbb{P}[\mid Y_n \mid \geq a] + \mathbb{E}[\mathbb{1}_{[0,a]}(\mid Y_n \mid) \mid e^{itY_n} - 1 \mid] + \mid \phi_{X_n}(t) - \phi_X(t) \mid \\
&\leq 2\mathbb{P}[\mid Y_n \mid \geq a] + \sup_{x\in[0,a]} \mid e^{itx} - 1 \mid + \mid \phi_{X_n}(t) - \phi_X(t) \mid
\end{aligned}$$

or la limite supérieur d'une somme est plus petite que la somme des limites supérieures et si une suite converge sa limite supérieure est égale à sa limite donc pour tout réel a positif :

$$\begin{aligned}
\overline{\lim}_n \mid \phi_{X_n+Y_n}(t) - \phi_X(t) \mid &\leq 2\overline{\lim}_n \mathbb{P}[\mid Y_n \mid \geq a] + \sup_{x\in[0,a]} \mid e^{itx} - 1 \mid + \overline{\lim}_n \mid \phi_{X_n}(t) - \phi_X(t) \mid \\
&= \sup_{x\in[0,a]} \mid e^{itx} - 1 \mid,
\end{aligned}$$

la dernière égalité provenant de la convergence en loi de X_n vers X et de la convergence en probabilité de Y_n vers 0. Ainsi pour tout a réel positif :

$$\overline{\lim}_n \mid \phi_{X_n+Y_n}(t) - \phi_X(t) \mid \leq \sup_{x\in[0,a]} \mid e^{itx} - 1 \mid,$$

en faisant tendre a vers 0 on obtient donc $\overline{\lim}_n \mid \phi_{X_n+Y_n}(t) - \phi_X(t) \mid = 0$.

Or $(\mid \phi_{X_n+Y_n}(t) - \phi_X(t) \mid)_n$ est une suite de termes positifs donc elle est convergente et converge vers 0.

c) On prend X de loi symétrique (X a la même loi que $-X$), et on pose $X_n = -X$. Alors X_n converge en loi vers X, mais $X_n - X$ converge en loi vers $-2X$.