

TD 8 : Modes de convergence

1. Soit $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ un espace de probabilité. Déterminer pour chacune des convergences suivantes à quelle condition sur la suite $(A_n)_{n \geq 1}$ elle a lieu.

- La suite $(\mathbb{1}_{A_n})_{n \geq 1}$ converge en probabilité vers 0.
- La suite $(\mathbb{1}_{A_n})_{n \geq 1}$ converge dans L^2 vers 0.
- La suite $(\mathbb{1}_{A_n})_{n \geq 1}$ converge presque sûrement vers 0.

Solution de l'exercice 1. a. Supposons que $\mathbb{1}_{A_n}$ converge vers 0 en probabilité. Alors en particulier, $\mathbb{P}(\mathbb{1}_{A_n} > \frac{1}{2}) = \mathbb{P}(A_n)$ tend vers 0. Réciproquement, si $\mathbb{P}(A_n)$ converge vers 0, alors pour tout $\varepsilon > 0$, $\mathbb{P}(\mathbb{1}_{A_n} > \varepsilon) \leq \mathbb{P}(A_n)$ converge vers 0.

Finalemment la condition est $\lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{P}(A_n) = 0$.

b. On a $\mathbb{E}[\mathbb{1}_{A_n}] = \mathbb{P}(A_n)$. La condition est donc $\lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{P}(A_n) = 0$.

c. Soit $\omega \in \Omega$. La suite $(\mathbb{1}_{A_n}(\omega))_{n \geq 1}$ converge vers 0 si et seulement si elle est stationnaire, égale à 0 à partir d'un certain rang. Ceci a lieu si et seulement si ω appartient à $\liminf A_n^c$, qui est le complémentaire de $\limsup A_n$. Ainsi, la convergence a lieu presque sûrement si et seulement si $\mathbb{P}(\limsup A_n) = 0$.

2. Soit $(X_n)_{n \geq 1}$ une suite de variables aléatoires indépendantes de loi de Bernoulli de paramètre $p \in]0, 1[$. Montrer qu'avec probabilité 1, la suite $(X_n)_{n \geq 1}$ prend une infinité de fois la valeur 1 et une infinité de fois la valeur 0.

Solution de l'exercice 2. Pour tout $n \geq 1$, posons $A_n = \{X_n = 1\}$ et $B_n = \{X_n = 0\}$. Les événements $(A_n)_{n \geq 1}$ sont indépendants et tous de probabilité $p > 0$. En particulier, $\sum_{n \geq 1} \mathbb{P}(A_n) = +\infty$. La deuxième partie du lemme de Borel-Cantelli entraîne donc que $\mathbb{P}(\limsup A_n) = 1$. Le même raisonnement s'applique aux événements B_n qui sont de probabilité $1 - p > 0$. Donc $\mathbb{P}(\limsup B_n) = 1$, et $\mathbb{P}(\limsup A_n \cap \limsup B_n) = 1$. Or l'événement $\limsup A_n \cap \limsup B_n$ est précisément l'événement où la suite $(X_n)_{n \geq 1}$ prend une infinité de fois la valeur 1 et une infinité de fois la valeur 0.

3. Soit $(X_n)_{n \geq 1}$ une suite de variables aléatoires telle que pour tout $n \geq 1$ on ait

$$\mathbb{P}(X_n = -1) = 1 - \frac{1}{n^2} \text{ et } \mathbb{P}(X_n = n^2 - 1) = \frac{1}{n^2}.$$

a. Montrer que la suite $(X_n)_{n \geq 1}$ converge vers -1 en probabilité.

b. Montrer que la suite $(X_n)_{n \geq 1}$ converge presque sûrement vers -1 . Cette convergence a-t-elle lieu dans L^1 ?

Solution de l'exercice 3. a. Soit $\varepsilon > 0$ un réel. Pour tout $n \geq 1$, on a $\mathbb{P}(|X_n + 1| > \varepsilon) = \frac{1}{n^2}$, donc

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{P}(|X_n + 1| > \varepsilon) = 0.$$

Puisque ceci a lieu pour tout $\varepsilon > 0$, la suite $(X_n)_{n \geq 1}$ converge en probabilité vers -1 .

b. On a, pour tout $n \geq 1$, $\mathbb{P}(X_n \neq -1) = \frac{1}{n^2}$, donc

$$\sum_{n \geq 1} \mathbb{P}(X_n \neq -1) < +\infty.$$

D'après le lemme de Borel-Cantelli, ceci entraîne qu'avec probabilité 1, il n'y a qu'un nombre fini de valeurs de n pour lesquelles X_n n'est pas égal à -1 . Autrement dit, avec probabilité 1, X_n est égal à -1 pour n assez grand. En particulier, avec probabilité 1, la suite $(X_n)_{n \geq 1}$ converge vers -1 .

La suite $(X_n)_{n \geq 1}$ converge donc presque sûrement vers -1 .

Si l'on avait convergence dans L^1 de la suite $(X_n)_{n \geq 1}$ vers -1 , on aurait en particulier $\lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{E}[X_n] = \mathbb{E}[-1] = -1$. Or, pour tout $n \geq 1$, on a

$$\mathbb{E}[X_n] = -1\left(1 - \frac{1}{n^2}\right) + (n^2 - 1)\frac{1}{n^2} = 0.$$

La convergence n'a donc pas lieu dans L^1 .

4. Soit $(\theta_n)_{n \geq 1}$ une suite de réels strictement positifs telle que $\lim_{n \rightarrow +\infty} \theta_n = +\infty$. Soit $(X_n)_{n \geq 1}$ une suite de variables aléatoires indépendantes telle que pour tout $n \geq 1$, X_n suive la loi exponentielle de paramètre θ_n .

a. Étudier la convergence en probabilités de la suite $(X_n)_{n \geq 1}$. Quelle hypothèse n'a-t-on pas utilisée ?

b. Reprendre la question précédente avec la convergence dans L^1 .

c. Étudier, dans le cas où $\theta_n = n$ puis dans le cas où $\theta_n = \log n$, la convergence presque sûre de la suite $(X_n)_{n \geq 1}$.

Solution de l'exercice 4. a. On devine que la suite $(X_n)_{n \geq 1}$ tend vers 0 en probabilité. Par exemple, on peut observer que l'espérance et la variance de X_n , qui valent toutes deux $\frac{1}{\theta_n}$, convergent vers 0. On sait que cela implique que la suite $(X_n)_{n \geq 0}$ converge dans L^2 vers 0, et donc en probabilité.

Démontrons néanmoins directement la convergence. Soit $\varepsilon > 0$. On a

$$\mathbb{P}(X_n > \varepsilon) = \int_{\varepsilon}^{+\infty} \theta_n e^{-\theta_n x} dx = e^{-\theta_n \varepsilon}.$$

Puisque la suite $(\theta_n)_{n \geq 1}$ tend vers $+\infty$, la suite $(e^{-\theta_n \varepsilon})_{n \geq 1}$ tend vers 0, et ce quel que soit ε . Ceci montre qu'on a la convergence

$$X_n \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{P} 0.$$

On ne s'est pas servi de l'hypothèse d'indépendance.

b. Puisque la suite $(X_n)_{n \geq 1}$ converge vers 0 en probabilité, sa seule limite possible dans L^1 est 0. Pour tout $n \geq 1$, on a

$$\mathbb{E}[|X_n - 0|] = \mathbb{E}[|X_n|] = \mathbb{E}[X_n] = \frac{1}{\theta_n},$$

qui tend vers 0 lorsque n tend vers l'infini. Ceci montre qu'on a la convergence

$$X_n \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{L^1} 0.$$

On ne s'est toujours pas servi de l'hypothèse d'indépendance.

c. Comme à la question précédente, la seule limite presque sûre possible pour la suite $(X_n)_{n \geq 0}$ est 0. La question est donc de déterminer si l'événement

$$\bigcap_{k \geq 1} \bigcup_{N \geq 1} \bigcap_{n \geq N} \left\{ |X_n| \leq \frac{1}{k} \right\},$$

qui est l'événement où la suite converge vers 0, est de probabilité 1 ou non. Pour que cet événement soit de probabilité 1, il faut (et il suffit) que pour tout $k \geq 1$, l'événement

$$\bigcup_{N \geq 1} \bigcap_{n \geq N} \left\{ |X_n| \leq \frac{1}{k} \right\}$$

soit de probabilité 1, ce qui équivaut à ce que l'événement complémentaire

$$\bigcap_{N \geq 1} \bigcup_{n \geq N} \left\{ |X_n| > \frac{1}{k} \right\}$$

soit de probabilité nulle. Ce dernier événement se présente comme la limite supérieure d'une suite d'événements, en l'occurrence la suite $(\{|X_n| > \frac{1}{k}\})_{n \geq 1}$.

Considérons le cas $\theta_n = n$. Nous avons

$$\mathbb{P} \left(\left\{ |X_n| > \frac{1}{k} \right\} \right) = e^{-\frac{n}{k}} = (e^{-\frac{1}{k}})^n,$$

si bien que pour tout $k \geq 1$, la série

$$\sum_{n \geq 1} \mathbb{P} \left(\left\{ |X_n| > \frac{1}{k} \right\} \right),$$

qui est une série géométrique de raison strictement inférieure à 1, converge. Le lemme de Borel-Cantelli nous permet d'en déduire que

$$\mathbb{P} \left(\limsup \left\{ |X_n| > \frac{1}{k} \right\} \right) = \mathbb{P} \left(\bigcap_{N \geq 1} \bigcup_{n \geq N} \left\{ |X_n| > \frac{1}{k} \right\} \right) = 0.$$

Nous avons déjà dit pourquoi ceci entraînait la convergence presque sûre de la suite. Dans ce cas, nous avons donc

$$X_n \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{p.s.} 0.$$

Nous ne nous sommes toujours pas servi de l'hypothèse d'indépendance.

Nous allons enfin nous en servir dans le cas $\theta_n = \log n$. En effet, dans ce cas,

$$\mathbb{P} \left(\left\{ |X_n| > \frac{1}{k} \right\} \right) = e^{-\frac{\log n}{k}} = \frac{1}{n^{\frac{1}{k}}}.$$

Pour $k = 1$ par exemple, nous en déduisons

$$\sum_{n \geq 1} \mathbb{P} \left(\left\{ |X_n| > \frac{1}{k} \right\} \right) = +\infty$$

et donc, par la deuxième assertion du lemme de Borel-Cantelli,

$$\mathbb{P}(\limsup \{|X_n| > 1\}) = \mathbb{P} \left(\bigcap_{N \geq 1} \bigcup_{n \geq N} \{|X_n| > 1\} \right) = 1.$$

Ainsi, avec probabilité 1, la suite $(X_n)_{n \geq 1}$ prend une infinité de fois des valeurs supérieures à 1. Ce comportement est incompatible avec la convergence vers 0, aussi, la probabilité qu'elle converge vers 0 est nulle. Nous avons déjà dit que la seule limite presque sûre possible pour la suite $(X_n)_{n \geq 1}$ était la variable nulle, car c'est sa limite en probabilité.

Dans le cas où $\theta_n = \log n$, nous en déduisons que la suite $(X_n)_{n \geq 1}$ n'a pas de limite presque sûre.

Une simulation peut permettre de mieux saisir la différence entre la convergence en probabilité et la convergence presque sûre. Voici respectivement un tirage des 100 premiers termes et des 10000 premiers termes de la suite $(X_n)_{n \geq 1}$ lorsque $\theta_n = n$.

La suite converge rapidement vers 0 et, après quelques fluctuations, ne prend plus que des valeurs extrêmement petites. On verrait un tel comportement en grossissant autant qu'on pourrait le souhaiter l'échelle sur l'axe des ordonnées.

Voici maintenant un tirage des 100 premiers termes et des 10000 premiers termes de la suite $(X_n)_{n \geq 1}$ lorsque $\theta_n = \log n$.

La suite a tendance à prendre des valeurs proches de 0 et, bien que ce ne soit pas très visible, cette tendance s'accroît lorsque n grandit, au point que la densité de points bleus au-dessus de n'importe quelle barrière strictement positive finira par devenir quasiment nulle (c'est le sens de la convergence en probabilité). Par contre, il arrive, et il continuera d'arriver pour des valeurs arbitrairement grandes de n que la suite prenne des valeurs macroscopiquement grandes, en l'occurrence de l'ordre de 1. On peut vérifier expérimentalement la persistance de ce comportement en regardant un tirage des 100 000 premiers termes :

5. Soit $(a_n)_{n \geq 1}$ une suite de réels. Soit c un réel.

a. Montrer que $\limsup a_n > c$ si et seulement s'il existe un réel $c' > c$ tel qu'on ait $a_n > c'$ pour une infinité de n .

b. Montrer que $\limsup a_n < c$ si et seulement s'il existe un réel $c' < c$ tel que $a_n < c'$ pour n assez grand.

Solution de l'exercice 5. a. Supposons $\limsup a_n > c$. Il existe une sous-suite de $(a_n)_{n \geq 1}$ qui converge vers $\limsup a_n$. Soit $(a_{n_k})_{k \geq 1}$ une telle sous-suite. Soient c' et c'' tels que $c < c' < c'' < \limsup a_n$. Le fait que la suite $(a_{n_k})_{k \geq 1}$ converge vers $\limsup a_n$ assure que pour k assez grand, on a $a_{n_k} \geq c'' > c'$. Ainsi, la suite $(a_n)_{n \geq 1}$ a une infinité de termes strictement supérieurs à c' .

Réciproquement, supposons qu'il existe $c' > c$ et une infinité de n tels que $a_n > c'$. La suite $(a_n)_{n \geq 1}$ possède donc une sous-suite $(b_k)_{k \geq 1}$ dont tous les termes sont strictement supérieurs à c' . Toute valeur d'adhérence de cette sous-suite est donc supérieure ou égale à c' . Par ailleurs, toute valeur d'adhérence de $(b_k)_{k \geq 1}$ est aussi une valeur d'adhérence de $(a_n)_{n \geq 1}$. Ainsi, $\limsup a_n \geq \limsup b_k \geq c' > c$.

b. Supposons $a_n < c'$ pour n assez grand. Alors toute suite extraite de a_n est bornée asymptotiquement par c' , donc toute limite de suite extraite de a_n est inférieure ou égale à c' . Ainsi, $\limsup a_n \leq c' < c$.

Réciproquement, supposons que $\limsup a_n < c$. On peut trouver c' tel que $\limsup a_n < c' < c$. Alors en reprenant les notations de l'exercice précédent, vu la décroissance de s_p , il existe un N tel que $s_p < c'$ pour tout $p > N$, en particulier $s_N < c'$ ce qui donne par définition de s_N , pour tout $n > N$, $a_n < c' < c$.

6. Soit $(X_n)_{n \geq 1}$ une suite de variables aléatoires de loi exponentielle $\mathcal{E}(1)$.

a. Montrer que $\mathbb{P} \left(\limsup \frac{X_n}{\log n} > 1 \right) = 0$.

On suppose désormais X_1, X_2, \dots indépendantes.

b. Montrer que $\mathbb{P} \left(\limsup \frac{X_n}{\log n} < 1 \right) = 0$. Montrer que ce résultat peut être faux sans l'hypothèse d'indépendance.

c. Montrer que $\limsup \frac{X_n}{\log n}$ est presque sûrement égale à une constante que l'on déterminera.

d. Montrer que $\liminf X_n$ est presque sûrement égale à 0.

Solution de l'exercice 6. a. D'après l'exercice 3, on a

$$\begin{aligned} \left\{ \overline{\lim} \frac{X_n}{\log n} > 1 \right\} &= \bigcup_{k \geq 1} \left\{ \frac{X_n}{\log n} > 1 + \frac{1}{k} \text{ infiniment souvent} \right\} \\ &= \bigcup_{k \geq 1} \limsup_{n \rightarrow \infty} \left\{ \frac{X_n}{\log n} > 1 + \frac{1}{k} \right\}. \end{aligned}$$

Pour tous $n, k \geq 1$, on a, puisque X_n suit la loi exponentielle de paramètre 1,

$$\mathbb{P}\left(\frac{X_n}{\log n} > 1 + \frac{1}{k}\right) = \mathbb{P}\left(X_n > \log\left(n^{1+\frac{1}{k}}\right)\right) = e^{-\log\left(n^{1+\frac{1}{k}}\right)} = \frac{1}{n^{1+\frac{1}{k}}}.$$

Pour tout $k \geq 1$, ce nombre est, en fonction de n , le terme général d'une série convergente, donc

$$\sum_{n \geq 1} \mathbb{P}\left(\frac{X_n}{\log n} > 1 + \frac{1}{k}\right) < +\infty.$$

Le lemme de Borel-Cantelli assure donc que

$$\mathbb{P}\left(\limsup_{n \rightarrow \infty} \left\{ \frac{X_n}{\log n} > 1 + \frac{1}{k} \right\}\right) = 0.$$

Puisqu'une union dénombrable d'événements de probabilité nulle est encore de probabilité nulle, on en déduit

$$\mathbb{P}\left(\overline{\lim} \frac{X_n}{\log n} > 1\right) = 0.$$

b. D'après l'exercice 3 encore,

$$\begin{aligned} \left\{ \overline{\lim} \frac{X_n}{\log n} < 1 \right\} &= \bigcup_{k \geq 1} \left\{ \frac{X_n}{\log n} < 1 - \frac{1}{k} \text{ pour } n \text{ assez grand} \right\} \\ &= \bigcup_{k \geq 1} \liminf_{n \rightarrow \infty} \left\{ \frac{X_n}{\log n} < 1 - \frac{1}{k} \right\} \\ &= \bigcup_{k \geq 1} \left(\limsup_{n \rightarrow \infty} \left\{ \frac{X_n}{\log n} \geq 1 - \frac{1}{k} \right\} \right)^c. \end{aligned}$$

Pour tous $n, k \geq 1$, on a, d'après le même calcul que précédemment,

$$\mathbb{P}\left(\frac{X_n}{\log n} \geq 1 - \frac{1}{k}\right) = \frac{1}{n^{1-\frac{1}{k}}},$$

si bien que

$$\sum_{n \geq 1} \mathbb{P}\left(\frac{X_n}{\log n} \geq 1 - \frac{1}{k}\right) = +\infty.$$

Puisque les variables aléatoires X_1, X_2, \dots sont indépendantes, la deuxième partie du lemme de Borel-Cantelli entraîne

$$\mathbb{P}\left(\limsup_{n \rightarrow \infty} \left\{ \frac{X_n}{\log n} \geq 1 - \frac{1}{k} \right\}\right) = 1,$$

d'où il découle que

$$\mathbb{P}\left(\overline{\lim} \frac{X_n}{\log n} < 1\right) = 0.$$

Si on avait par exemple $X_n = X_1$ pour tout $n \geq 1$, auquel cas l'hypothèse d'indépendance serait mise en défaut, on aurait $\frac{X_n}{\log n} = \frac{X_1}{\log n}$ qui tendrait vers 0 presque sûrement. En particulier, on aurait $\limsup \frac{X_n}{\log n} = 0$ presque sûrement.

c. Puisque $\mathbb{P}(\limsup \frac{X_n}{\log n} < 1) + \mathbb{P}(\limsup \frac{X_n}{\log n} > 1) + \mathbb{P}(\limsup \frac{X_n}{\log n} = 1) = 1$, il découle des résultats précédents que $\limsup \frac{X_n}{\log n}$ est presque sûrement égale à 1.

d. Soit (a_n) une suite de réels. D'après la deuxième partie du lemme de Borel-Cantelli, il suffit, pour qu'on ait $X_n < a_n$ infiniment souvent, d'avoir $\sum_{n \geq 1} \mathbb{P}(X_n < a_n) = +\infty$. Or, pour a voisin de 0, on a $\mathbb{P}(X < a) = 1 - e^{-a} = a + O(a^2)$. Il suffit donc d'avoir $\sum_{n \geq 1} a_n = +\infty$. On peut donc prendre $a_n = \frac{1}{n}$.

L'événement $\{X_n \leq \frac{1}{n} \text{ infiniment souvent}\}$ est donc de probabilité 1. Sur cet événement, $\liminf X_n = 0$, donc $\liminf X_n = 0$ presque sûrement.

Ici encore, si on avait par exemple $X_n = X_1$ pour tout $n \geq 1$, on aurait $\liminf X_n = X_1$ presque sûrement, qui n'est pas la variable aléatoire nulle.

7. Soit $(X_n)_{n \geq 1}$ une suite de variables aléatoires de carré intégrable.

a. Montrer que pour tout $n \geq 1$ et tout $a \in \mathbb{R}$, on a

$$\mathbb{E}[(X_n - a)^2] = (\mathbb{E}[X_n] - a)^2 + \text{Var}(X_n).$$

b. En déduire que la suite $(X_n)_{n \geq 1}$ converge en moyenne quadratique vers une constante a si et seulement si on a les convergences

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{E}[X_n] = a \text{ et } \lim_{n \rightarrow \infty} \text{Var}(X_n) = 0.$$

Solution de l'exercice 7. a. On a

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[(X_n - a)^2] &= \mathbb{E}[(X_n - \mathbb{E}[X_n]) + (\mathbb{E}[X_n] - a)]^2 \\ &= \text{Var}(X_n) + 2\mathbb{E}[(X_n - \mathbb{E}[X_n])(\mathbb{E}[X_n] - a)] + (\mathbb{E}[X_n] - a)^2. \end{aligned}$$

En sortant la constante $(\mathbb{E}[X_n] - a)$ de l'espérance du deuxième terme du membre de droite, on constate que celui-ci est nul, d'où le résultat.

b. Supposons d'abord que $E[(X_n - a)^2] \rightarrow 0$ lorsque $n \rightarrow \infty$. D'après la question précédente, $E[(X_n - a)^2] = (\mathbb{E}[X_n] - a)^2 + \text{Var}(X_n)$, les deux termes sont positifs donc tendent aussi vers 0 quand $n \rightarrow \infty$.

Réciproquement, supposons que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{E}[X_n] = a \text{ et } \lim_{n \rightarrow \infty} \text{Var}(X_n) = 0.$$

On conclut grâce à l'égalité démontrée au a., en remarquant que les deux termes du membre de droite tendent vers 0.

8. Soit $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ un espace de probabilité. Soient $X, X_1, X_2, \dots : (\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P}) \rightarrow \mathbb{R}$ des variables aléatoires réelles. On suppose que la suite $(X_n)_{n \geq 1}$ converge en probabilité vers X .

a. Montrer qu'il existe une suite strictement croissante d'entiers $1 \leq n_1 < n_2 < \dots$ telle que pour tout $k \geq 1$ on ait

$$\mathbb{P} \left(|X_{n_k} - X| > \frac{1}{k} \right) \leq \frac{1}{2^k}.$$

b. Pour tout $k \geq 1$, on pose $Y_k = X_{n_k}$ (on dit que la suite $(Y_k)_{k \geq 1}$ est *extraite* de la suite $(X_n)_{n \geq 1}$). Montrer que la suite $(Y_k)_{k \geq 1}$ converge presque sûrement vers X .

On a montré que d'une convergence en probabilité on pouvait extraire une convergence presque sûre.

Solution de l'exercice 8. a. Soit $k \geq 1$. Supposons qu'on ait construit les $k-1$ premiers termes $n_1 < \dots < n_{k-1}$ de la suite. Comme $\mathbb{P} \left(|X_n - X| > \frac{1}{k} \right) \rightarrow 0$ lorsque $n \rightarrow \infty$, on peut trouver $n = n_k > n_{k-1}$ tel que

$$\mathbb{P} \left(|X_{n_k} - X| > \frac{1}{k} \right) \leq \frac{1}{2^k}.$$

b. On remarque que

$$\lim_{K \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^K \mathbb{P} \left(|X_{n_k} - X| > \frac{1}{k} \right) = \sum_{k \geq 1} \mathbb{P} \left(|X_{n_k} - X| > \frac{1}{k} \right) < +\infty.$$

Or, par le théorème de convergence monotone,

$$\begin{aligned} \sum_{k \geq 1} \mathbb{P} \left(|X_{n_k} - X| > \frac{1}{k} \right) &= \lim_{K \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^K \mathbb{P} \left(|X_{n_k} - X| > \frac{1}{k} \right) = \lim_{K \rightarrow \infty} \mathbb{E} \left[\sum_{k=1}^K \mathbb{1}_{\{|X_{n_k} - X| > \frac{1}{k}\}} \right] \\ &= \mathbb{E} \left[\lim_{K \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^K \mathbb{1}_{\{|X_{n_k} - X| > \frac{1}{k}\}} \right] = \mathbb{E} \left[\sum_{k \geq 1} \mathbb{1}_{\{|X_{n_k} - X| > \frac{1}{k}\}} \right]. \end{aligned}$$

Comme cette espérance est finie, on en déduit que la variable aléatoire $\sum_{k \geq 1} \mathbb{1}_{\{|X_{n_k} - X| > \frac{1}{k}\}}$ est finie presque sûrement. Autrement dit, il y a seulement un nombre fini (dépendant de ω) d'indices k tels que $|X_{n_k} - X| > \frac{1}{k}$. On en déduit qu'avec probabilité 1, pour tout k assez grand $|X_{n_k} - X| \leq \frac{1}{k}$. En particulier, $|X_{n_k} - X| \rightarrow 0$ quand $k \rightarrow \infty$ presque sûrement. En fait on pouvait conclure directement en appliquant le lemme de Borel-Cantelli, l'argument donné ci-dessus étant le cœur de la preuve de ce lemme.