TD1. Dénombrements, opérations sur les ensembles.

1. Combien de façons y a-t-il de classer 10 personnes à un concours sans ex-æquo ? Et combien de façons s'il peut y avoir des ex-æquo à la première place ? Que vaut le quotient de ces deux nombres ?

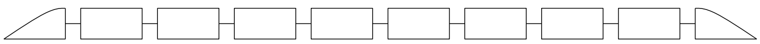
Solution de l'exercice 1. Il est utile de se souvenir de la formule des arrangements : la solution est $A_{10}^{10} = 10!$. Une autre manière de répondre consiste à remarquer qu'il y a 10 candidats possibles pour la première place, 9 pour la seconde, *etc*, c'est-à-dire $10 \times 9 \times 8 \times \cdots \times 2 \times 1 = 10!$ configurations différentes.

Si l'on tolère $k \in \{2, \dots, 10\}$ candidats ex-æquo à la première place, il y a $\binom{10}{k} \times (10-k)!$ configurations possibles. Le quotient de ces deux nombres vaut :

$$\frac{10!}{\binom{10}{k}(10-k)!} = k!,$$

qui représente le nombre de façons d'ordonner les k candidats arrivés ex-æquo à la première place.

2. Un TGV est constitué de huit wagons identiques encadrés par deux locomotives identiques et disposées en sens contraire, selon le schéma ci-dessous. On supposera que chaque wagon peut rouler dans les deux sens.



On dispose dans un hangar de huit wagons et deux locomotives. De combien de manières peut-on constituer un TGV et y placer un conducteur ? Et si on dispose de douze wagons et trois locomotives ?

Solution de l'exercice 2. Il y a deux possibilités pour la première locomotive, 8 pour le premier wagon, 7 pour le second, *etc*, et une unique possibilité pour la dernière locomotive. Il y a donc $2 \times 8!$ TGV possibles. Avec trois locomotives et douze wagons, il y a $A_3^2 A_{12}^8$ trains possibles (on arrange 2 locomotives parmi 3 et 8 wagons parmi 12).

3. Avec un jeu de 32 cartes, combien peut-on former de paires ? De brelans ? De full (cinq cartes contenant une paire et un brelan) ?

En tirant trois cartes successivement avec remise, de combien de façons peut-on tirer trois cartes de la même hauteur ? En tirant cinq cartes successivement avec remise, de combien de façons peut-on tirer un full ?

Solution de l'exercice 3. Dans un jeu de 32 cartes, il y a 8 hauteurs et 4 couleurs. Pour former une paire, il y a 8 manières de choisir la hauteur, et $\binom{4}{2} = 6$ manières de choisir la couleur des deux cartes de même hauteur. On peut donc former $8 \cdot 6 = 48$ paires. De même on peut former $8\binom{4}{3} = 32$ brelans. Pour former un full, il y a 8 manières de choisir la hauteur de la paire, puis 7 de choisir celle du brelan, $\binom{4}{2}$ de choisir les couleurs de la paire et $\binom{4}{3}$ celles du brelan, soit $8 \times 7 \times 6 \times 4 = 1344$ possibilités.

Pour les tirages successifs (cette fois l'ordre compte) de 3 cartes avec remise, pour former un brelan, on a 32 possibilités pour la première carte, puis 4 pour chacune des suivantes, soit $32 \times 4 \times 4 = 512$ possibilités. On peut aussi le voir ainsi : il y a 8 manières de choisir la hauteur, puis 4 de choisir la couleur de chacune des trois cartes (vu que le tirage est avec remise et ordonné), soit $8 \cdot 4^3 = 512$ manières de former un brelan.

Le tirage d'un full (ordonné) avec remise est la donnée de : la hauteur du brelan (8 possibilités), la hauteur de la paire (7 possibilités restantes), les couleurs (4^3 possibilités pour le brelan ordonné et 4^2 pour la paire ordonnée), et enfin de comment sont imbriquées les cartes du brelan et de la paire, autrement dit des places occupées par les cartes de la paire parmi les 5, il y a donc $\binom{5}{2} = 10$ choix possibles. Finalement, on obtient $8 \times 7 \times 4^5 \times 10 = 573440$ tirages d'un full ordonné avec remise.

4. Jusqu'en 2008, un tirage du loto était un ensemble de six nombres entiers distincts compris entre 1 et 49. Combien y avait-il de tirages possibles ? Pour tout entier n compris entre 0 et 6, déterminer le nombre de ces tirages ayant exactement n numéros communs avec un tirage donné. Combien y avait-il de tirages ne contenant pas deux nombres consécutifs ?

Depuis 2008, un tirage est une paire formée d'un ensemble de cinq entiers distincts compris entre 1 et 49 et d'un entier compris entre 1 et 10. Y a-t-il plus ou moins de tirages possibles qu'avant 2008 ? Combien y a-t-il de tirages formés de six nombres distincts ?

Solution de l'exercice 4. Avant 2008, il y avait $\binom{49}{6} = 13983816$ tirages possibles.

Étant donné un tirage, choisir un autre tirage ayant exactement n numéros en commun avec le premier revient à choisir les n numéros du premier tirage à conserver (il y a $\binom{6}{n}$ manières de le faire), puis les $6 - n$ autres numéros, parmi les 43 numéros restants (les 49 numéros de la grille auxquels on retire les 6 numéros contenus dans le tirage initial, soit $\binom{43}{6-n}$ choix possibles) ; soit $\binom{6}{n}\binom{43}{6-n}$ tirages ayant exactement n numéros en commun avec un tirage donné.

Pour dénombrer les tirages sans numéros consécutifs, remarquons qu'un tirage est donné par la position des 6 numéros tirés parmi 49 numéros possibles et peut donc être écrit comme un septuplé $(n_0, ..., n_6)$ où n_0 représente le nombre de numéros non choisis avant la boule numéro 1, n_i le nombre de numéros non choisis entre la boule numéro i et la boule $i+1$ et n_6 le nombre de numéros non choisis après la boule numéro 6. Le nombre de boules non-choisies étant constant égal à 43, il y a donc une bijection entre les tirages de 6 numéros parmi 49 et les septuplés vérifiant

$$\left\{ \begin{array}{l} 43 = n_0 + \cdots + n_6 \\ \forall i \in \{0, \ldots 6\},\ n_i \geq 0 \end{array} \right.$$

On cherche maintenant à dénombrer les tirages sans numéros consécutifs, vérifiant les conditions $n_1 \geq 1, \ldots n_5 \geq 1$. En enlevant 1 à chacun des nombres entre n_1 et n_5, cela revient à dénombrer le nombre de septuplés $(n_0, ..., n_6)$ vérifiant les conditions :

$$\left\{ \begin{array}{l} 38 = n_0 + \cdots + n_6 \\ \forall i \in \{0, \ldots 6\},\ n_i \geq 0 \end{array} \right.$$

Et de la même manière, il y a une correspondance bijective entre ces septuplés et les tirages de 6 numéros parmi 44. Ainsi le nombre de tirages sans numéros consécutifs est $\binom{44}{6}$.

Actuellement, il y en a $\binom{49}{5} \times 10 = \binom{49}{6}\frac{6\times 10}{44} = 19068840 > \binom{49}{6}$, il y a donc davantage de tirages possibles. Pour éviter d'avoir 2 nombres identiques, il faut déterminer en premier l'entier entre 1 et 10 puis le retirer de la liste des 49 numéros. On obtient donc $\binom{48}{5} \times 10 = 17123040$ tels tirages.

5. De combien de façons peut-on mettre n boules numérotées dans p urnes ?

De combien de façons peut-on mettre n boules identiques dans p urnes ?

Solution de l'exercice 5. Il y a p choix indépendants pour chaque boule, soit p^n manières de placer n boules numérotées dans p urnes.

Si les boules sont identiques, cela revient à considérer $n+p-1$ positions alignées, avec deux parois aux deux extrémités. Sur les $n+p-1$ positions, on place n boules et $p-1$ parois, dessinant ainsi p urnes dont la somme des boules est égale à n. Voici un exemple lorsque $n=5$, $p=3$: il y a 2 boules dans la première urne, 0 dans la deuxième, 3 dans la troisième :

$$| * * | | * * * |$$

On choisit donc la positions des n boules parmi les $n+p-1$ positions possibles, les $p-1$ parois étant alors placées dans les positions restantes. De manière analogue, on pourrait aussi placer les $p-1$ parois. Il y a donc $\binom{n+p-1}{p-1} = \binom{n+p-1}{n}$ manières de le faire.

On peut aussi voir que ce problème revient à décomposer n comme somme de p entiers naturels, où l'entier naturel n_i représente le nombre de boules dans la i-ième urne.

6. On lance n dés indistinguables. Combien y a-t-il de lancers distincts possibles ? De combien de façons peut-on obtenir n chiffres distincts ? Reprendre ces questions en supposant les dés peints de n couleurs distinctes.

Solution de l'exercice 6.

Lorsque les dés sont indistinguables, un lancer équivaut à placer n boules indistinguables dans 6 urnes, où le nombre de boules dans la i-ième urne représente le nombre de répétitions de la valeur i, $i \in \{1, \dots, 6\}$. D'après l'exercice précédent, on sait qu'il y a $\binom{n+5}{n}$ possibilités.

Si on veut que les valeurs soient différentes, il faut que $n \leq 6$. On a alors autant de possibilités que de choix de ces n chiffres parmi 6, soit $\binom{6}{n}$.

Supposons maintenant les dés de couleurs différentes. Il y a 6 possibilités pour chaque dé, soit 6^n tirages possibles.

Si on veut que les valeurs soient différentes, il faut que $n \leq 6$ et on a alors 6 possibilités pour le premier dé, 5 pour le second... et $6 - n + 1$ pour le dernier, soit A_6^n possibilités.

7. Une urne contient N boules, chacune peinte avec une couleur choisie parmi p. Pour chaque $i \in \{1, \dots, p\}$ on note N_i le nombre de boules de couleur i. Ainsi, $N = N_1 + \dots + N_p$. On se donne un entier n et des entiers $n_1, \dots, n_p$ tels que $n = n_1 + \dots + n_p$.

De combien de façons peut-on tirer sans remise n boules de cette urne de telle sorte qu'on ait n_i boules de couleur i pour chaque $i \in \{1, \dots, p\}$? Qu'en est-il si l'on tire maintenant avec remise ?

Remarque : un tirage est ici un tirage ordonné

Solution de l'exercice 7.

Rappelons d'abord la définition du *coefficient multinomial*, qui est une généralisation du coefficient binomial. Le nombre de façons de répartir n objets dans p familles de sorte que la i-ième famille contienne n_i éléments est égale à :

$$\frac{n!}{n_1! \dots n_p!}.$$

Ce nombre se note $\binom{n}{n_1 \ \dots \ n_p}$ et s'appelle *coefficient multinomial*. C'est aussi le coefficient de $x_1^{n_1} \dots x_p^{n_p}$ dans le développement de $(x_1 + \dots + x_p)^n$, ou encore le nombre d'anagrammes avec p lettres distinctes contenant exactement n_i fois la $i^{\text{ème}}$ lettre, pour $i = 1, \dots, p$.

Considérons le tirage sans remise. Pour chaque $i = 1, \dots, p$, il y $A_{N_i}^{n_i}$ manières de choisir les n_i boules de couleur i, ordonnées. Il faut ensuite choisir la position des couleurs sur les n positions, autrement dit le nombre d'anagrammes (formés de couleurs au lieu de lettres) avec p couleurs contenant exactement n_i fois la $i^{\text{ème}}$ couleur, soit $\binom{n}{n_1 \ \dots \ n_p}$ possibilités. Il y donc

$$A_{N_1}^{n_1} \dots A_{N_p}^{n_p} \binom{n}{n_1 \ \dots \ n_p} = \binom{N_1}{n_1} \dots \binom{N_p}{n_p} n!$$

façons de tirer sans remise les n boules de manière à avoir n_i boules de couleur i pour chaque i. La deuxième égalité se comprend directement en commençant par un tirage non-ordonné et tenant compte ensuite de l'ordre.

Considérons le tirage avec remise. Pour chaque $i = 1, \dots, p$, il y $N_i{}^{n_i}$ manières de choisir les n_i boules de couleur i, ordonnées. Le choix de la position des couleurs est le même que dans le tirage sans remise. Ainsi, le nombre de façons de tirer avec remise les n boules de manière à avoir n_i boules de couleur i pour chaque i est :

$$N_1{}^{n_1} \dots N_p{}^{n_p} \binom{n}{n_1 \ \dots \ n_p}$$

8. Soit E un ensemble. Pour toute partie A de E, on définit la *fonction indicatrice* de A et on note $\mathbb{1}_A$ la fonction $\mathbb{1}_A : E \to \{0,1\}$ définie par

$$\forall x \in E, \mathbb{1}_A(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \in A \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Montrer que l'application de $\mathscr{P}(E)$ dans $\{0,1\}^E$ qui à une partie associe sa fonction indicatrice est une bijection. En déduire que $\mathscr{P}(E)$ est fini si E est fini et calculer son cardinal.

Solution de l'exercice 8. Si f est une fonction indicatrice (autrement dit une fonction $E \to \{0,1\}$), on peut lui associer la pré-image A de $\{1\}$ par f. On a alors, pour tout $x \in E$,

$$x \in A \Leftrightarrow f(x) = 1.$$

Autrement dit f est la fonction indicatrice de A.

On peut aussi partir d'un ensemble A, considérer sa fonction indicatrice f, puis la pré-image par celle-ci de $\{1\}$, dont on vérifie facilement (grâce à la même équivalence) qu'il s'agit de A.

L'exercice 1 permet ce conclure que l'application de $\mathscr{P}(E)$ dans $\{0,1\}^E$ qui à une partie associe sa fonction indicatrice est une bijection, et que sa réciproque est l'application qui à une indicatrice associe la pré-image de $\{1\}$.

En particulier si E est fini, on a $\#\mathscr{P}(E) = \#(\{0,1\}^E) = 2^{\#E}$.

9. Soit E un ensemble. Soient A et B des parties de E. Exprimer $\mathbb{1}_{A^c}$ en fonction de $\mathbb{1}_A$. Exprimer $\mathbb{1}_{A\cap B}$ en fonction de $\mathbb{1}_A$ et $\mathbb{1}_B$. En écrivant $A \cup B$ en fonction de A^c et B^c, exprimer $\mathbb{1}_{A\cup B}$ en fonction de $\mathbb{1}_A$ et $\mathbb{1}_B$.

On observera que si A est finie, $|A| = \sum_{x\in E} \mathbb{1}_A(x)$.

Solution de l'exercice 9. On note $\mathbb{1} := \mathbb{1}_E$ la fonction constante égale à 1 sur E (souvent identifiée à 1).

On vérifie facilement que $\mathbb{1}_{A^c} = \mathbb{1} - \mathbb{1}_A$ et $\mathbb{1}_{A\cap B} = \mathbb{1}_A \mathbb{1}_B$.

Comme $A \cup B = (A^c \cap B^c)^c$, les formules précédentes donnent :

$$\mathbb{1}_{A\cup B} = \mathbb{1} - ((\mathbb{1} - \mathbb{1}_A)(\mathbb{1} - \mathbb{1}_B)) = \mathbb{1}_A + \mathbb{1}_B - \mathbb{1}_A \mathbb{1}_B.$$

10. Soit E un ensemble. Soient $A_1, \ldots, A_n$ des parties de E. Montrer que

$$|A_1 \cup \ldots \cup A_n| = \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k-1} \sum_{1 \leq i_1 < \ldots < i_k \leq n} |A_{i_1} \cap \ldots \cap A_{i_k}|.$$

C'est la formule d'*inclusion-exclusion*, aussi connue sous le nom de *formule du crible de Poincaré*.

En appliquant cette formule à un ensemble et à des parties bien choisies, établir une formule pour le nombre de surjections de $\{1, \ldots, p\}$ dans $\{1, \ldots, n\}$ pour tous n et p entiers.

Solution de l'exercice 10. Comme dans l'exercice précédent, on obtient

$$\begin{aligned}
\mathbb{1} - \mathbb{1}_{A_1 \cup \cdots \cup A_n} &= \mathbb{1}_{A_1^c} \ldots \mathbb{1}_{A_n^c} \\
&= (\mathbb{1} - \mathbb{1}_{A_1})(\mathbb{1} - \mathbb{1}_{A_2}) \ldots (\mathbb{1} - \mathbb{1}_{A_n}) \\
&= \sum_{I \subset \{1,2,\ldots,n\}} \prod_{i \in I} (-\mathbb{1}_{A_i}) \\
&= \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \sum_{I \subset \{1,2,\ldots,n\}, \#I = k} \mathbb{1}_{\bigcap_{i \in I} A_i} \\
&= \mathbb{1} + \sum_{k=1}^{n} (-1)^k \sum_{1 \leq i_1 < i_2 < \cdots < i_k \leq n} \mathbb{1}_{A_{i_1} \cap A_{i_2} \cap \cdots \cap A_{i_k}}.
\end{aligned}$$

D'où

$$\mathbb{1}_{A_1 \cup \cdots \cup A_n} = \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k-1} \sum_{1 \leq i_1 < i_2 < \cdots < i_k \leq n} \mathbb{1}_{A_{i_1} \cap A_{i_2} \cap \cdots \cap A_{i_k}}.$$

En sommant sur tous les éléments $x \in E$ la valeur en x du membre de gauche, on obtient $\#(A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_n)$, et en faisant la même chose pour le membre de droite on obtient l'expression voulue.

Remarquons d'abord que si $p < n$, le nombre de surjections de $\{1, \ldots, p\}$ dans $\{1, \ldots, n\}$ est égal à 0. Supposons donc $p \geq n$.

Soit E l'ensemble des applications de $\{1, \ldots, p\}$ dans $\{1, \ldots, n\}$. Pour tout $i = 1, \ldots, n$, on considère le sous-ensemble A_i de E formé des applications de $\{1, \ldots, p\}$ dans $\{1, \ldots, n\}$

qui ne prennent pas la valeur i. Alors,

$$\begin{aligned}(A_1 \cup \cdots \cup A_n)^c &= A_1^c \cap \cdots \cap A_n^c \\ &= \{f \in E \ : \forall\, i = 1, \ldots, n,\ \exists\, x_i \in \{1, \ldots, p\} \text{ t.q. } f(x_i) = i\}.\end{aligned}$$

Ainsi, $(A_1 \cup \cdots \cup A_n)^c$ est l'ensemble des surjections de $\{1, \ldots, p\}$ dans $\{1, \ldots, n\}$. D'autre part, pour tout $1 \leq i_1 < i_2 < \cdots < i_k \leq n$,

$$\begin{aligned}A_{i_1} \cap \cdots \cap A_{i_k} &= \{f \in E :\ f \text{ ne prend pas les valeurs } \{i_1, \ldots, i_k\}\} \\ &= \{f \in E :\ f : \{1, \ldots, p\} \to \{1, \ldots, n\} \setminus \{i_1, \ldots, i_k\}\}.\end{aligned}$$

Donc le cardinal de $A_{i_1} \cap \cdots \cap A_{i_k}$ est $(n-k)^p$. D'après la formule d'inclusion-exclusion, on obtient :

$$\begin{aligned}|(A_1 \cup \cdots \cup A_n)^c| &= \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \sum_{1 \leq i_1 < i_2 < \cdots < i_k \leq n} |A_1 \cap \cdots \cap A_n| \\ &= \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \sum_{1 \leq i_1 < i_2 < \cdots < i_k \leq n} (n-k)^p \\ &= \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \binom{n}{k} (n-k)^p = \sum_{k=0}^{n} (-1)^{n-k} \binom{n}{k} k^p.\end{aligned}$$

11. Soient E un ensemble fini de cardinal p et F un ensemble fini de cardinal n.

a) Rappeler le cardinal : du nombre d'applications de E dans F, du nombre d'injections de E dans F. Combien y-a-t-il de bijections de E dans F ?

b) Soit E un ensemble fini de cardinal n. Déterminer le nombre d'applications bijectives $f : E \to E$ telles que pour tout $x \in E$ on ait $f(x) \neq x$. Il s'agit de déterminer le nombre de dérangements (=bijections sans point fixe) d'un ensemble de cardinal n. Quelle est la limite, lorsque n tend vers l'infini, de la proportion de bijections de E dans E qui ont cette propriété ?

Solution de l'exercice 11.

a) Le nombre d'applications de E dans F est n^p. Si $p > n$, le nombre d'injections de E dans F est nul, si $p \leq n$, il est égal à A_n^p. Si $p \neq n$, le nombre de bijections de E dans F est nul, sinon il est égal à $n!$.

b) On peut supposer sans perte de généralité que $E = \{1, \ldots, n\}$. On procède de manière analogue à l'exercice précédent. On prend comme ensemble de départ E' l'ensemble des bijections de E dans E. Pour tout $i = 1, \ldots, n$, on considère le sous-ensemble A_i de E' formé des bijections de E dans E qui fixent i. Alors,

$$\begin{aligned}(A_1 \cup \cdots \cup A_n)^c &= A_1^c \cap \cdots \cap A_n^c \\ &= \{f \in E' \ : \forall\, i = 1, \ldots, n,\ f(i) \neq i\}.\end{aligned}$$

Ainsi, $(A_1 \cup \cdots \cup A_n)^c$ est l'ensemble des bijections sans point fixe de E. D'autre part, pour tout $1 \leq i_1 < i_2 < \cdots < i_k \leq n$,

$$A_{i_1} \cap \cdots \cap A_{i_k} = \{f \in E' : f(i_1) = i_1, \ldots, f(i_k) = i_k\}.$$

Ces applications qui ont (au moins) k points fixes s'identifient naturellement à des applications bijectives de $\{1, \ldots, n\} \setminus \{i_1, \ldots, i_k\}$ dans lui même. Il y en a donc $(n-k)!$. D'après la formule d'inclusion-exclusion, on obtient :

$$\begin{aligned} |(A_1 \cup \cdots \cup A_n)^c| &= \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \sum_{1 \leq i_1 < i_2 < \cdots < i_k \leq n} |A_1 \cap \cdots \cap A_n| \\ &= \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \sum_{1 \leq i_1 < i_2 < \cdots < i_k \leq n} (n-k)! \\ &= \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \binom{n}{k} (n-k)! = n! \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{k!}. \end{aligned}$$

Lorsqu'on divise par $n!$ pour obtenir la proportion de bijections de E qui n'ont pas de point fixe, on reconnaît le développement à l'ordre n de $\exp(x)$ pour $x = -1$, qui converge donc vers $1/e$ lorsque $n \to \infty$.