Examen final du 11 juin 2014 (2ème session)

Durée : 2 heures. Tous documents interdits. On désignera invariablement par λ la mesure de Lebesgue et l'on abrégera souvent, comme le veut l'usage, $d\lambda(x)$ en dx.

Exercice 1. Énoncer le théorème de la classe monotone.

Solution de l'exercice 1. Théorème 1.16 du cours. Pour tout π-système $\mathscr{C}$, $\Lambda(\mathscr{C}) = \sigma(\mathscr{C})$. En particulier, le plus petit λ-système $\Lambda(\mathscr{C})$ contenant $\mathscr{C}$ est donc une tribu.

Exercice 2. Soit $(E, \mathscr{A}, \mu)$ un espace mesuré, où E est un espace métrique et $\mathscr{A}$ est sa tribu borélienne.

a) Soit une suite de fonctions $f_n : E \to \mathbb{R}$ continues μ-p.p. Montrer que si la suite (f_n) converge uniformément vers $f : E \to \mathbb{R}$ en dehors d'un ensemble $\mu-$négligeable, alors f est continue μ-p.p.

b) On suppose maintenant que $E = \mathbb{R}^d$ et que μ est une mesure de Borel. Soit $f : (E, \mathscr{A}) \to (\mathbb{R}, \mathscr{B}or(\mathbb{R}))$ une fonction mesurable quelconque élément de $L^p(\mu)$, pour $p \in [1, +\infty]$. Existe-t-il toujours une suite de fonctions continues qui converge vers f dans $L^p(\mu)$? [on distinguera les cas où p est fini ou infini].

Solution de l'exercice 2.

a) Pour tout entier n, il existe une fonction continue g_n telle que $\Omega_n := \{f_n = g_n\}$ est de complémentaire μ-négligeable. Avec $\Omega := \cap_n \Omega_n$, on a $\mu(^c\Omega) = 0$ et pour tout $x \in \Omega$, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $f_n(x) = g_n(x)$.

Maintenant par hypothèse, il existe N μ-négligeable tel que

$$\lim_{n\to\infty} \sup_{x \in {}^cN} |\, f(x) - f_n(x)\,| = 0.$$

Donc

$$\lim_{n\to\infty} \sup_{x \in \Omega \cap {}^cN} |\, f(x) - f_n(x)\,| = 0.$$

Mais $\sup_{x\in\Omega\cap {}^cN} |\, f(x) - f_n(x)\,| = \sup_{x\in\Omega\cap {}^cN} |\, f(x) - g_n(x)\,|$. Donc la suite (g_n) converge uniformément vers f sur $\Omega \cap {}^cN$, si bien que f est continue en tout point de $\Omega \cap {}^cN$, c'est-à-dire que f est continue p.p.

b) D'après le Théorème 5.5 du cours, dès que p est fini, il existe une suite de fonctions continues qui converge dans L^p vers f (et l'on peut même les choisir à support compact, et indéfiniment différentiables). Dans le cas où $p = \infty$, on sait que si (f_n) converge vers f dans L^p, alors (f_n) converge uniformément vers f en dehors d'un ensemble négligeable. D'après la question précédente, cela implique que f est alors continue $\mu-$p.p., ce qui n'est évidemment pas toujours le cas. La réponse est donc oui si p est fini et non si $p = \infty$.

Exercice 3. Soient μ et ν deux mesures sur la tribu borélienne $\mathscr{A}$ d'un espace métrique E. On suppose que pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $\eta > 0$ tel que

$$\forall O \text{ ouvert de } E, \quad \mu(O) < \eta \Longrightarrow \nu(O) < \varepsilon.$$

Montrer que si μ est extérieurement régulière, alors $\nu \ll \mu$.

Solution de l'exercice 3. Soit $A \in \mathscr{A}$ tel que $\mu(A) = 0$. Soit $\varepsilon > 0$ et η comme dans l'énoncé. Comme μ est extérieurement régulière, il existe O ouvert de E tel que $A \subseteq O$ et $\mu(O) < \mu(A) + \eta = \eta$. D'après l'énoncé, ceci implique que $\nu(O) < \varepsilon$. Mais $A \subseteq O$, donc $\nu(A) < \varepsilon$. Comme ε est arbitraire, nous en concluons que $\nu(A) = 0$, et par conséquent ν est absolument continue par rapport à μ.

Exercice 4. Soit Π le demi-plan fermé de $\mathbb{R}^3$ suivant

$$\Pi := \{(u, v, w) \in \mathbb{R}^3 : u \geq 0, v = 0\} = [0, +\infty[\times\{0\} \times \mathbb{R},$$

et U le pavé ouvert de $\mathbb{R}^3$ suivant

$$U := \{(u, v, w) \in \mathbb{R}^3 : u > 0, 0 < v < 2\pi\} =]0, +\infty[\times]0, 2\pi[\times\mathbb{R}.$$

a) Soit φ le changement de coordonnées cylindriques en coordonnées cartésiennes

$$\begin{aligned} \varphi : \quad U &\longrightarrow \mathbb{R}^3 \\ (r, \theta, z) &\longmapsto (r\cos\theta, r\sin\theta, z). \end{aligned}$$

   i) Montrer que φ est de classe C^1 et déterminer son jacobien en tout point de U.

   ii) Caractériser $\varphi(U)$ à l'aide de Π et montrer que $\varphi : U \to \varphi(U)$ est un C^1-difféomorphisme.

b) Soit A un borélien quelconque de $\mathbb{R}^3$ inclus dans le demi-plan Π et $\widehat{A}$ le borélien obtenu par révolution de A autour de l'axe Oz (c'est-à-dire en faisant tourner A autour de Oz).

   i) Montrer que pour tout $(x, y, z) \in \varphi(U)$,

$$(x, y, z) \in \widehat{A} \Longleftrightarrow \psi \circ \varphi^{-1}(x, y, z) \in A,$$

   où ψ est l'application définie par

$$\begin{aligned} \psi : \quad U &\longrightarrow \Pi \\ (r, \theta, z) &\longmapsto (r, 0, z). \end{aligned}$$

   ii) En utilisant φ et la question b)-i), montrer que le volume de $\widehat{A}$ vaut

$$\lambda_3(\widehat{A}) = 2\pi \int_{\mathbb{R}} dr \int_{\mathbb{R}} dz \, r \mathbb{1}_{(r,0,z)\in A}$$

c) Soient $0 < R \leq a$ et C le fermé d'équation

$$C := \{(x, y, z) \in \Pi : (x - a)^2 + z^2 \leq R^2\}.$$

   i) Quels sont les noms (en français ou en anglais) des objets géométriques C et $\widehat{C}$?

ii) Calculer $I = \int_{\mathbb{R}} dx \int_{\mathbb{R}} dz\, x \mathbb{1}_{(x,0,z)\in C}$.

iii) En déduire le volume de $\widehat{C}$.

Solution de l'exercice 4.

a) i) Il est trivial de calculer les dérivées partielles de φ en tout (r,θ,z) de U et de voir qu'elles sont toutes continues sur U. Le jacobien de φ en $(r,\theta,z)\in U$ vaut r.

ii) Il est assez facile de voir que $\varphi(U) = \mathbb{R}^3 \setminus \Pi$, et il est évident que φ est injective, donc $\varphi : U \to \varphi(U)$ est un C^1-difféomorphisme d'après le théorème d'inversion locale.

b) i) Pour tout point M de coordonnées $(x,y,z)\in\varphi(U)$, $\varphi^{-1}(x,y,z)$ sont les coordonnées cylindriques de M. Or M est élément de $\widehat{A}$ ssi la projection rotationnelle de M autour de l'axe Oz sur le demi plan Π est élément de A. Mais en coordonnées cylindriques, cette projection n'est autre que ψ.

ii) Comme $\varphi(U)$ est de mesure de Lebesgue nulle dans $\mathbb{R}^3$, le volume de $\widehat{A}$ vaut donc

$$\begin{aligned}
\lambda_3\big(\widehat{A}\big) &= \lambda_3\big(\widehat{A}\cap\varphi(U)\big)\\
&= \int_{\varphi(U)} d\lambda_3(x,y,z)\, \mathbb{1}_{\widehat{A}}(x,y,z)\\
&= \int_{\varphi(U)} d\lambda_3(x,y,z)\, \mathbb{1}_{\psi\circ\varphi^{-1}(x,y,z)\in A}\\
&= \int_U r\, dr\, d\theta\, dz\, \mathbb{1}_{\psi(r,\theta,z)\in A}\\
&= \int_U r\, dr\, d\theta\, dz\, \mathbb{1}_{(r,0,z)\in A}\\
&= 2\pi \int_{\mathbb{R}} dr \int_{\mathbb{R}} dz\, r \mathbb{1}_{(r,0,z)\in A}.
\end{aligned}$$

c) i) C est un disque et $\widehat{C}$ est un tore.

ii) Par le changement de coordonnées polaires $(x,z) = (a + r\cos\theta, r\sin\theta)$, on obtient

$$I = \int_{\mathbb{R}} dx \int_{\mathbb{R}} dz\, x \mathbb{1}_{(x,0,z)\in C} = \int_{]0,R[} \int_{]0,2\pi[} r\, dr\, d\theta\, (a + r\cos\theta) = \pi a R^2.$$

iii) Le volume de $\widehat{C}$ est donc $2\pi I = 2\pi^2 a R^2$.