Examen final du 25 juin 2012 (2ème session)

Durée : 2 heures. Tous documents interdits. Dans l'exercice 2, on désignera par λ la mesure de Lebesgue et l'on abrégera $d\lambda(x)$ en dx.

Exercice 1. Soit $(E, \mathscr{A}, \mu)$ un espace mesuré et pour tout $p \in [1, +\infty]$, soit $L^p := L^p(E, \mathscr{A}, \mu)$.

a) Montrer que pour tout $p \geq 0$ et tout $f \in L^\infty$, $\| \, | f |^p \, \|_\infty = \| f \|_\infty^p$.

b) Montrer que pour tout $p \geq 1$ et tout $f \in L^1 \cap L^\infty$, $\| \, | f |^p \, \|_1 \leq \| f \|_\infty^{p-1} \| f \|_1$, et en déduire que $f \in L^p$.

On se donne à présent $f, f_0, f_1, \ldots$ des éléments de $L^1 \cap L^\infty$, et l'on suppose que la suite (f_n) converge vers f dans L^1 et dans L^∞.

c) Montrer que la suite (f_n) converge vers f μ-p.p. ainsi que dans L^p pour tout $p \geq 1$.

d) Dans cette question, on cherche à montrer que pour tout entier $p \geq 1$, la suite (f_n^p) converge vers f^p dans L^1.

i) Soit $p \geq 1$ un entier. On rappelle que pour tous $x, y \in \mathbb{R}$, $x^p - y^p = (x-y) \sum_{k=0}^{p-1} x^k y^{p-1-k}$. En déduire que

$$\| f_n^p - f^p \|_1 \leq \| f_n - f \|_\infty \left(\| f^{p-1} \|_1 + \sum_{k=1}^{p-1} \| f_n \|_k^k \, \| f \|_\infty^{p-1-k} \right).$$

ii) Rappeler pourquoi dans tout espace vectoriel normé, si la suite (x_n) converge vers x, alors la suite $(\| x_n \|)$ converge vers $\| x \|$.

iii) Conclure.

e) Dans cette question, on cherche à montrer que pour tout $p \geq 1$, la suite (f_n^p) converge vers f^p dans L^∞.

i) Montrer qu'il existe un ensemble Ω de complémentaire négligeable tel que la suite (f_n) converge uniformément vers f sur Ω et tel que $\sup_{x \in \Omega} | f(x) | < \infty$.

ii) Montrer qu'il existe un sous-ensemble borné K de $\mathbb{R}$ et un entier N tels que pour tous $x \in \Omega$ et $n \geq N$, $f(x) \in K$ et $f_n(x) \in K$.

iii) Expliquer pourquoi l'application $x \mapsto x^p$ est lipschitzienne sur K et conclure.

f) Soit Q un polynôme. Montrer que si (f_n) converge vers f dans L^1 et dans L^∞, alors la suite $(Q(f_n))$ converge vers $Q(f)$ dans L^p pour tout $p \in [1, +\infty]$.

Solution de l'exercice 1.

a) Pour tout $M > 0$, il est équivalent de dire que $\| f \|_\infty \leq M$ et que $| f | \leq M$ μ-p.p., ce qui est encore équivalent à $| f |^p \leq M^p$ μ-p.p., ce qui est donc équivalent à $\| \, | f |^p \, \|_\infty \leq M^p$. En conclusion, pour tout $M > 0$, il est équivalent de dire que $\| f \|_\infty^p \leq M^p$ ou que $\| \, | f |^p \, \|_\infty \leq M^p$, ce qui montre que $\| \, | f |^p \, \|_\infty = \| f \|_\infty^p$.

b) Il suffit d'appliquer l'inégalité de Hölder à $| f |^p = | f |^{p-1} | f |$, puisque $\| \, | f |^{p-1} \, \|_\infty = \| f \|_\infty^{p-1} < \infty$ et que $f \in L^1$. Ainsi $\| f \|_p = \| \, | f |^p \, \|_1^{1/p} < \infty$, et $f \in L^p$.

c) Il suffit d'appliquer la dernière inégalité à $f_n - f$ pour obtenir

$$\| f_n - f \|_p^p \leq \| f_n - f \|_\infty^{p-1} \| f_n - f \|_1,$$

qui tend vers 0 dès que $p \geq 1$. La convergence p.p. est une conséquence de la convergence dans L^∞.

d) Convergence dans L^1.

i) Soit $p \geq 1$ un entier. Avec $x = f_n$ et $y = f$, on obtient

$$f_n^p - f^p = (f_n - f) \sum_{k=0}^{p-1} f_n^k f^{p-1-k}.$$

Une première application de l'inégalité de Hölder donne

$$\| f_n^p - f^p \|_1 \leq \| f_n - f \|_\infty \| \sum_{k=0}^{p-1} f_n^k f^{p-1-k} \|_1,$$

puis par l'inégalité de Minkowski,

$$\| f_n^p - f^p \|_1 \leq \| f_n - f \|_\infty \left(\| f^{p-1} \|_1 + \sum_{k=1}^{p-1} \| f_n^k f^{p-1-k} \|_1 \right),$$

et enfin par l'inégalité de Hölder,

$$\| f_n^p - f^p \|_1 \leq \| f_n - f \|_\infty \left(\| f^{p-1} \|_1 + \sum_{k=1}^{p-1} \| f_n^k \|_1 \| f^{p-1-k} \|_\infty \right),$$

et l'on conclut en remarquant que $\| f_n^k \|_1 = \| f_n \|_k^k$ et en se rappelant que $\| f^k \|_\infty = \| f \|_\infty^k$.

ii) Il est bien connu que la norme est une application continue car 1-lipschitzienne.

iii) Le terme entre parenthèses dans la grande inégalité précédente possède un nombre fini de termes (tous finis puisque ces fonctions sont toutes dans L^k pour $k \in [1, +\infty]$), donc on peut intervertir passage à la limite et sommation, si bien que ce terme converge, grâce au rappel précédent et au fait que (f_n) converge vers f dans L^k pour tout k, vers $\| f^{p-1} \|_1 + \sum_{k=1}^{p-1} \| f \|_k^k \| f \|_\infty^{p-1-k} < \infty$. Comme $\| f_n - f \|_\infty$ tend vers 0, on a donc que $\| f_n^p - f^p \|_1$ tend vers 0, ce qui montre que (f_n^p) converge bien vers f^p dans L^1.

e) Convergence dans L^∞.

i) Comme (f_n) converge dans L^∞ vers f, il existe un ensemble A de complémentaire négligeable sur lequel (f_n) converge uniformément vers f. Comme $f \in L^\infty$, il existe un ensemble B de complémentaire négligeable tel que f est bornée sur B. Il suffit donc de définir $\Omega := A \cap B$.

ii) Comme f est bornée sur Ω, il existe un intervalle fini $[a, b]$ contenant l'image de Ω par f. Par la convergence uniforme sur Ω il existe N tel que pour tout $n \geq N$ et tout $x \in \Omega$, $| f_n(x) - f(x) | \leq 1$, et donc pour tout $n \geq N$ et tout $x \in \Omega$, $f_n(x) \in K := [a - 1, b + 1]$.

iii) Pour $p \geq 1$, la fonction $x \mapsto x^p$ est continûment dérivable et sa dérivée a donc un supremum fini C sur K, si bien que cette fonction est C-lipschitzienne sur K. Ainsi, pour tout entier $n \geq N$ et pour tout $x \in \Omega$, $|\, f_n^p(x) - f^p(x)\,| \leq C|\, f_n(x) - f(x)\,|$. Ceci implique que $\sup_{x\in\Omega} |\, f_n^p(x) - f^p(x)\,| \to 0$ lorsque $n \to \infty$, c'est-à-dire que (f_n^p) converge vers f^p dans L^∞.

f) Application élémentaire de l'inégalité de Minkowski : si $Q(X) = \sum_{k=0}^j a_k X^k$, alors $\|\, Q(f_n) - Q(f)\,\|_r \leq \sum_{k=0}^j |\, a_k\,|\|\, f_n^k - f^k\,\|_r$, où $r = 1$ ou ∞, et chaque terme de cette somme finie tend vers 0 lorsque $n \to \infty$. Ainsi $(Q(f_n))$ converge vers $Q(f)$ dans L^1 et dans L^∞, et d'après le début de l'exercice, $(Q(f_n))$ converge vers $Q(f)$ dans L^p, pour tout $p \in [1, +\infty]$.

Exercice 2. Soient α et β deux éléments de $\mathbb{R}_+^\star$. Pour toute fonction $h : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ non nulle au voisinage de $+\infty$, on note $f(x) \sim h(x)$ lorsque $x \to +\infty$, si $\lim_{x\to+\infty} f(x)/h(x) = 1$.

a) Soit $g \in L^1(\mathbb{R}_+, \mathscr{B}(\mathbb{R}_+), \lambda)$. Par un changement de variable, montrer que, quand $x \to +\infty$,

$$G(x) := \int_0^\infty du\, e^{-\alpha u}\, e^{-\beta u^2/2}\, g(xu) \sim \frac{\int_0^\infty du\, g(u)}{x}$$

b) En appliquant la question précédente, après un changement de variable, à une fonction g bien choisie, montrer que, lorsque $x \to +\infty$,

$$G_1(x) := e^{\alpha x}\, e^{\beta x^2/2} \int_x^\infty du\, e^{-\alpha u}\, e^{-\beta u^2/2} \sim \frac{1}{\beta x}$$

c) Soit $f : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$ une fonction lipschitzienne telle que $\lim_{x\to+\infty} xf(x) = +\infty$. On cherche à montrer que, lorsque $x \to +\infty$,

$$G_2(x) := e^{\alpha x}\, e^{\beta x^2/2} \int_x^\infty du\, e^{-\alpha u}\, e^{-\beta u^2/2}\, f(u) \sim \frac{f(x)}{\beta x}$$

i) En faisant le changement de variable $y = x(u - x)$ et en écrivant $\frac{f(x)}{\beta x}$ sous la forme $x^{-1} \int_0^\infty dy\, e^{-\beta y}\, f(x)$, montrer que

$$\left| G_2(x) - \frac{f(x)}{\beta x} \right| \Big/ \left| \frac{f(x)}{x} \right| \leq H_1(x) + H_2(x),$$

où

$$H_1(x) = \frac{1}{|f(x)|} \int_0^\infty dy\, e^{-\beta y} \left| f\left(x + \frac{y}{x}\right) - f(x) \right|,$$

et

$$H_2(x) = \int_0^\infty dy \left| 1 - e^{-\alpha y/x}\, e^{-\beta y^2/(2x^2)} \right| e^{-\beta y}.$$

ii) Conclure.

Solution de l'exercice 2.

a) Avec le changement de variable $v = ux$, on obtient

$$xG(x) = \int_0^\infty dv\, e^{-\alpha v/x}\, e^{-\beta v^2/2x^2}\, g(v).$$

Comme l'intégrand est dominé, lorsque x varie, par la fonction $|\, g\,|$, qui est intégrable, le théorème de convergence dominée assure que

$$\lim_{x\to+\infty} xG(x) = \int_0^\infty dv \lim_{x\to+\infty} e^{-\alpha v/x}\, e^{-\beta v^2/2x^2}\, g(v) = \int_0^\infty dv\, g(v).$$

b) Avec le changement de variable $v = u - x$, on obtient

$$G_1(x) = \int_0^\infty dv\, e^{-\alpha v}\, e^{-\beta v^2/2}\, e^{-\beta v x},$$

et l'on peut donc appliquer la question précédente à la fonction g définie par $g(x) = e^{-\beta x}$, dont l'intégrale vaut β^{-1}, d'où le résultat.

c) Avec le changement de variable $y = x(u - x)$, on obtient

$$xG_2(x) = \int_0^\infty dy\, e^{-\alpha y/x}\, e^{-\beta y^2/2x^2}\, e^{-\beta y}\, f\left(x + \frac{y}{x}\right)$$

En écrivant l'équivalent cherché sous la forme $x^{-1}\int_0^\infty dy\, e^{-\beta y}\, f(x)$, on obtient

$$\begin{aligned}\left|G_2(x) - \frac{f(x)}{\beta x}\right| \;&\leq\; x^{-1}\int_0^\infty dy\, e^{-\alpha y/x}\, e^{-\beta y^2/2x^2}\, e^{-\beta y}\, \left|f\left(x + \frac{y}{x}\right) - f(x)\right| \\ &+\; x^{-1}\,|f(x)| \int_0^\infty dy\, \left|1 - e^{-\alpha y/x}\, e^{-\beta y^2/2x^2}\right|\, e^{-\beta y}.\end{aligned}$$

Par conséquent,

$$\left|G_2(x) - \frac{f(x)}{\beta x}\right| / \left|\frac{f(x)}{x}\right| \leq H_1(x) + H_2(x),$$

où

$$H_1(x) = \frac{1}{|f(x)|}\int_0^\infty dy\, e^{-\beta y}\, \left|f\left(x + \frac{y}{x}\right) - f(x)\right|,$$

et

$$H_2(x) = \int_0^\infty dy\, \left|1 - e^{-\alpha y/x}\, e^{-\beta y^2/2x^2}\right|\, e^{-\beta y}.$$

Or dès que $x \geq 1$,

$$\left|1 - e^{-\alpha y/x}\, e^{-\beta y^2/2x^2}\right|\, e^{-\beta y} \leq e^{-\beta y},$$

qui est intégrable en y, donc par convergence dominée, $\lim_{x\to\infty} H_2(x) = 0$.
De plus, f est lipschitzienne, donc il existe une constante $C > 0$ telle que

$$H_1(x) \leq \frac{1}{|f(x)|}\int_0^\infty dy\, e^{-\beta y}\, \frac{Cy}{x}.$$

Or par hypothèse $xf(x) \to +\infty$, donc $H_1(x) \to 0$. La conclusion est donc que

$$\lim_{x\to+\infty} \left|G_2(x) - \frac{f(x)}{\beta x}\right| / \left|\frac{f(x)}{x}\right| = 0,$$

ce qui donne le résultat.