Examen final du 22 juin 2010 (2ème session)

Durée : 2 heures. Tous documents interdits. La qualité et la rigueur de la rédaction seront prises en compte. En particulier, chaque application d'une définition ou d'un résultat du cours devra être justifiée, brièvement mais scrupuleusement.

Exercice 1. On rappelle que la *transformée de Fourier* d'une fonction λ-intégrable $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ est la fonction $\hat{f} : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{C}$ définie par

$$\hat{f}(u) := \int_{\mathbb{R}} e^{-iux} f(x)\, dx \qquad u \in \mathbb{R}.$$

Soit $a > 0$.

a) Calculer la transformée de Fourier de la fonction $f := \mathbb{1}_{[-a,a]}$.

b) Calculer la transformée de Fourier des fonctions f et g définies par $f(x) := e^{-ax}\mathbb{1}_{x\geq 0}$ et $g(x) := e^{-a|x|}$.

c) En utilisant la transformée de Fourier inverse, calculer la transformée de Fourier de la fonction h définie par

$$h(x) = \frac{1}{x^2 + a^2} \qquad x \in \mathbb{R}.$$

Solution de l'exercice 1.

a) En utilisant la parité des fonctions cos et sin

$$\begin{aligned}
\hat{f}(u) &= \int_{[-a,a]} e^{-iux} dx \\
&= \int_{[-a,a]} \cos(ux) dx - i \int_{[-a,a]} \sin(ux) dx \\
&= 2\int_{[0,a]} \cos(ux) dx + 0 \\
&= \frac{2}{u}[\sin(ux)]_0^a = \frac{2\sin(ua)}{u},
\end{aligned}$$

quand $u \neq 0$, tandis que $\hat{f}(0) = 2a$.

b) Après deux intégrations par parties, on obtient

$$\begin{aligned}
\hat{f}(u) &= \int_{[0,\infty[} e^{-iux} e^{-ax} dx \\
&= \int_{[0,\infty[} \cos(ux) e^{-ax} dx - i \int_{[0,\infty[} \sin(ux) e^{-ax} dx \\
&= \frac{1}{a} - \frac{iu}{a}\hat{f}(u),
\end{aligned}$$

ce qui donne

$$\hat{f}(u) = \frac{1}{a+iu}.$$

Après un changement de variable élémentaire, on obtient

$$\begin{aligned}
\hat{g}(u) &= \int_{]-\infty,0]} e^{-iux}e^{ax}dx + \int_{[0,\infty[} e^{-iux}e^{-ax}dx \\
&= \int_{[0,\infty[} e^{iux}e^{-ax}dx + \int_{[0,\infty[} e^{-iux}e^{-ax}dx \\
&= \hat{f}(-u) + \hat{f}(u) = \frac{2a}{a^2+u^2}.
\end{aligned}$$

c) Comme cette dernière fonction de u est λ-intégrable, on peut utiliser le théorème d'inversion de la transformée de Fourier, qui fournit l'égalité suivante pour λ-presque tout x

$$g(x) = \frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{R}} e^{iux}\frac{2a}{a^2+u^2}du.$$

Comme les deux membres sont des fonctions continues de x, l'égalité est valide pour tout x, et un changement de variable élémentaire donne

$$\int_{\mathbb{R}} e^{-iux}\frac{1}{a^2+u^2}du = \frac{\pi}{a}g(x),$$

autrement dit

$$\hat{h}(u) = \frac{\pi}{a}e^{-a|u|} \qquad u \in \mathbb{R}.$$

Exercice 2. Soient $(E_1, \mathcal{A}_1)$ et $(E_2, \mathcal{A}_2)$ deux espaces mesurables. Pour chaque $i = 1, 2$, on se donne μ_i et ν_i deux mesures finies sur $(E_i, \mathcal{A}_i)$ telles que $\mu_i \ll \nu_i$, autrement dit, μ_i est absolument continue par rapport à ν_i.

a) Montrer que $\mu_1 \otimes \mu_2$ et $\nu_1 \otimes \nu_2$ sont des mesures finies sur $(E_1 \times E_2, \mathcal{A}_1 \otimes \mathcal{A}_2)$.

b) Dans cette question, on cherche à montrer que $\mu_1 \otimes \mu_2 \ll \nu_1 \otimes \nu_2$. Soit $A \in \mathcal{A}_1 \otimes \mathcal{A}_2$. Pour tout $x \in E_1$, on note $A_x = \{y \in E_2 : (x, y) \in A\}$.

   i) Soit $B := \{x \in E_1 : \mu_2(A_x) \neq 0\}$ et $B' := \{x \in E_1 : \nu_2(A_x) \neq 0\}$. Expliquer brièvement pourquoi B et B' sont des éléments de $\mathcal{A}_1$.

   ii) Montrer que $B \subseteq B'$.

   iii) On suppose que $\nu_1 \otimes \nu_2(A) = 0$. Montrer que $\nu_1(B') = 0$, puis que $\mu_1(B) = 0$.

   iv) Conclure.

c) Dire pourquoi on peut appliquer le théorème de Radon–Nikodym aux couples de mesures (μ_1, ν_1), (μ_2, ν_2) et $(\mu_1 \otimes \mu_2, \nu_1 \otimes \nu_2)$. Dans la question suivante, on notera f_1, f_2 et g les dérivées de Radon–Nikodym respectivement associées à ces trois couples.

   Enfin, pour tout $(x, y) \in E_1 \times E_2$, on définit $f(x, y) := f_1(x)f_2(y)$ (on ne demande pas de montrer que la fonction f est mesurable par rapport à la tribu produit).

d) Dans cette dernière question, on cherche à démontrer que f et g sont égales $(\nu_1 \otimes \nu_2)$-p.p. Soit

$$\mathcal{B} := \{A \in \mathcal{A}_1 \otimes \mathcal{A}_2 : \mu_1 \otimes \mu_2(A) = \int_A f \; d(\nu_1 \otimes \nu_2)\}.$$

i) Montrer que $\mathcal{B}$ contient un π-système que l'on précisera.

ii) Montrer que $\mathcal{B}$ contient $\emptyset$, est stable par différence propre et est stable par réunion dénombrable croissante.

iii) Montrer que pour tout $A \in \mathcal{A}_1 \otimes \mathcal{A}_2$, $\mu_1 \otimes \mu_2(A) = \int_A f \; d(\nu_1 \otimes \nu_2)$.

iv) Conclure.

Solution de l'exercice 2.

a) Comme $E_1 \times E_2$ est un pavé à côté mesurables, par définition de la mesure produit, $\mu_1 \otimes \mu_2(E_1 \times E_2) = \mu_1(E_1)\mu_2(E_2)$, qui est le produit de deux réels finis, donc est bien fini. De même pour $\nu_1 \otimes \nu_2$.

b) Pour tout $x \in E_1$, on note $A_x = \{y \in E_2 : (x, y) \in A\}$.

i) Soit $B := \{x \in E_1 : \mu_2(A_x) \neq 0\}$ et $B' := \{x \in E_1 : \nu_2(A_x) \neq 0\}$. D'après un lemme du cours, pour tout élément A de la tribu produit $\mathcal{A}_1 \otimes \mathcal{A}_2$, l'application $x \mapsto \mu_2(A_x)$ est mesurable (avec tribu de départ $\mathcal{A}_1$ et tribu d'arrivée la tribu des boréliens de $\mathbb{R}_+$). Or B est l'image réciproque de l'ensemble mesurable $]0, +\infty[$ (ouvert donc borélien), c'est donc un ensemble mesurable, ici un élément de la tribu de départ $\mathcal{A}_1$. De même pour B'.

ii) Montrons que ${}^cB' \subseteq {}^cB$. Pour tout $x \in {}^cB'$, $\nu_2(A_x) = 0$, mais comme $\mu_2 \ll \nu_2$, on a aussi $\mu_2(A_x) = 0$ donc $x \in {}^cB$.

iii) Si $\nu_1 \otimes \nu_2(A) = 0$ alors d'après le théorème de Fubini–Tonelli, $0 = \nu_1 \otimes \nu_2(A) = \int_{E_1} d\nu_1(x)\nu_2(A_x)$, ce qui implique que $\nu_2(A_x) = 0$ pour ν_1-presque tout x, autrement dit $\nu_1(B') = 0$. Comme $B \subseteq B'$, on a alors $\nu_1(B) = 0$, et comme $\mu_1 \ll \nu_1$, on en déduit que $\mu_1(B) = 0$.

iv) En appliquant à nouveau le théorème de Fubini–Tonelli, pour tout $A \in \mathcal{A}_1 \otimes \mathcal{A}_2$ tel que $\nu_1 \otimes \nu_2(A) = 0$, on a

$$\mu_1 \otimes \mu_2(A) = \int_B d\mu_1(x)\mu_2(A_x) + \int_{{}^cB} d\mu_1(x)\mu_2(A_x) = 0.$$

En effet le premier terme est nul car $\mu_1(B) = 0$ et le deuxième terme est nul car sur ${}^cB$, la fonction $x \mapsto \mu_2(A_x)$ est identiquement nulle. Ceci prouve bien que $\mu_1 \otimes \mu_2 \ll \nu_1 \otimes \nu_2$.

c) On peut appliquer le théorème de Radon–Nikodym aux couples de mesures (μ_1, ν_1), (μ_2, ν_2) et $(\mu_1 \otimes \mu_2, \nu_1 \otimes \nu_2)$ car pour chaque couple, la première mesure est absolument continue par rapport à la seconde, et toutes ces mesures sont finies donc σ-finies.

d) Soit

$$\mathcal{B} := \{A \in \mathcal{A}_1 \otimes \mathcal{A}_2 : \mu_1 \otimes \mu_2(A) = \int_A f \; d(\nu_1 \otimes \nu_2)\}.$$

i) Le π-système dont il s'agit est la classe des pavés à côtés mesurables. En effet, pour tous A_1, A_2 mesurables par rapport à $\mathcal{A}_1$ et $\mathcal{A}_2$ respectivement,

$$\mu_1 \otimes \mu_2(A_1 \times A_2) = \mu_1(A_1)\mu_2(A_2) = \left(\int_{A_1} f_1 \; d\nu_1\right)\left(\int_{A_2} f_2 \; d\nu_2\right) = \int_{A_1 \times A_2} f \; d(\nu_1 \otimes \nu_2),$$

par le théorème de Fubini–Tonelli.

ii) $\mathcal{B}$ contient trivialement $\emptyset$. Pour tous $A \subseteq A' \in \mathcal{B}$, comme toutes les mesures considérées sont finies (on aurait pu seulement faire l'hypothèse de σ-finitude dès le début, mais la question de la différence propre aurait été plus longue à résoudre),

$$\mu_1 \otimes \mu_2(A' \backslash A) = \mu_1 \otimes \mu_2(A') - \mu_1 \otimes \mu_2(A) =$$
$$(\text{car } A \text{ et } A' \in \mathcal{B}) = \int_{A'} f \ d(\nu_1 \otimes \nu_2) - \int_A f \ d(\nu_1 \otimes \nu_2) = \int_{A' \backslash A} f \ d(\nu_1 \otimes \nu_2).$$

Donc $\mathcal{B}$ est stable par différence propre. Soit enfin une suite croissante (A_n) d'éléments de $\mathcal{B}$ et soit $A := \cup_n A_n = \lim_n \uparrow A_n$, qui est un élément de $\mathcal{A}_1 \otimes \mathcal{A}_2$ par stabilité des tribus par réunion dénombrable. Par continuité de la mesure (ici la mesure produit $\mu_1 \otimes \mu_2$) pour des suites croissantes d'ensembles mesurables (ici des éléments de la tribu produit $\mathcal{A}_1 \otimes \mathcal{A}_2$),

$$\begin{aligned}
\mu_1 \otimes \mu_2(A) &= \mu_1 \otimes \mu_2(\lim_n \uparrow A_n) \\
&= \lim_n \uparrow \mu_1 \otimes \mu_2(A_n) \\
&= \lim_n \uparrow \int_{A_n} f \ d(\nu_1 \otimes \nu_2) \quad \text{(car } A_n \in \mathcal{B} \text{ pour tout } n) \\
&= \lim_n \uparrow \int f \mathbb{1}_{A_n} \ d(\nu_1 \otimes \nu_2) \\
&= \int (\lim_n \uparrow f \mathbb{1}_{A_n}) \ d(\nu_1 \otimes \nu_2) \quad \text{(par convergence monotone)} \\
&= \int f \mathbb{1}_A \ d(\nu_1 \otimes \nu_2),
\end{aligned}$$

c'est-à-dire que $A \in \mathcal{B}$, et donc $\mathcal{B}$ est stable par réunion dénombrable croissante.

iii) Ainsi $\mathcal{B}$ est un λ-système contenant le π-système des pavés à côtés mesurables. D'après le théorème de la classe monotone, $\mathcal{B}$ contient la tribu engendrée par ce π-système, qui n'est autre que la tribu produit $\mathcal{A}_1 \otimes \mathcal{A}_2$, ce qui est la conclusion attendue.

iv) Ainsi tout élément A de la tribu produit vérifie

$$\int_A g \ d(\nu_1 \otimes \nu_2) = \mu_1 \otimes \mu_2(A) = \int_A f \ d(\nu_1 \otimes \nu_2).$$

Ceci assure que $g = f$ $(\nu_1 \otimes \nu_2)$-p.p., par une méthode classique du cours qui consiste à choisir $A = \{f > g\}$.