Examen final du 16 mai 2014 (1ère session)

Durée : 2 heures. Tous documents interdits. La qualité et la rigueur de la rédaction seront prises en compte.

Exercice 1. Énoncer un résultat du cours de votre choix reliant la convergence dans $L^p(\mu)$ ($p \in [1, +\infty]$) et la convergence $\mu-$p.p.

Solution de l'exercice 1. Il s'agissait d'énoncer un des résultats de la Proposition 4.1 du cours. Soit $p \in [1, +\infty]$, $(E, \mathscr{A}, \mu)$ un espace mesuré et $f, f_0, f_1, f_2, \ldots$ des fonctions mesurables allant de E dans $\mathbb{R}$.
a) [convergence L^p-dominée] Si $f_n \to f$ μ-p.p. et qu'il existe $g \in L^p$ tel que $|\, f_n \,| \leq g$ pour tout entier n, alors $f_n \overset{L^p}{\to} f$.
b) Si $f_n \overset{L^p}{\to} f$, alors
i) Si $p < \infty$, il existe une suite extraite de (f_n) qui converge vers f μ-p.p.
ii) Si $p = +\infty$, $f_n \to f$ uniformément en dehors d'un ensemble négligeable, donc $f_n \to f$ μ-p.p.
On pouvait également évoquer l'unicité de la limite d'une suite qui converge simplement et dans L^p.

Exercice 2. Soit $(E, \mathscr{A})$ et $(F, \mathscr{B})$ deux espaces mesurables. On cherche à redémontrer par une méthode différente de celle utilisée dans le cours que les sections d'éléments de la tribu produit $\mathscr{A} \otimes \mathscr{B}$ sont mesurables. Soit $x \in E$.

a) Pour $C \subseteq E \times F$, rappeler ce que désigne la section de C en x, notée C_x, qui est une partie de F.
b) Pour tous $A \subseteq E$ et $B \subseteq F$, caractériser $(A \times B)_x$.
c) Soit
$$\Lambda := \{C \subseteq E \times F : C_x \in \mathscr{B}\}.$$
Montrer que Λ est un λ-système.
d) Montrer que Λ contient $\mathscr{A} \times \mathscr{B}$.
e) Conclure.

Solution de l'exercice 2.

a) D'après la Définition 2.9 du cours,
$$C_x := \{y \in F : (x, y) \in C\}.$$
b) Bien entendu, la section en x de $A \times B$ est B si $x \in A$ et $\varnothing$ sinon.

c) Montrons que Λ est un λ-système. Tout d'abord Λ est non vide car $E \times F \in \Lambda$ (d'après la question b, $E \times F$ est de section F et $F \in \mathscr{B}$). Montrons d'abord que Λ est stable par différence propre. Soient $C \subseteq D$ tous deux éléments de Λ. Alors $(D \setminus C)_x = D_x \setminus C_x$, avec $C_x \subseteq D_x$. Or $C_x, D_x \in \mathscr{B}$ par hypothèse donc $(D \setminus C)_x \in \mathscr{B}$, c'est-à-dire $D \setminus C \in \Lambda$. Montrons enfin que Λ est stable par réunion dénombrable croissante. Soit $(C^{(n)})_n$ une suite croissante d'éléments de Λ et C sa limite. Alors la suite $(C_x^{(n)})$ est croissante et $(\cup_n C^{(n)})_x = \cup_n C_x^{(n)}$. Or pour tout n, $C_x^{(n)} \in \mathscr{B}$ par hypothèse donc $(\cup_n C^{(n)})_x \in \mathscr{B}$, c'est-à-dire $\cup_n C^{(n)} \in \mathscr{B}$. En conclusion, Λ est bien un λ-système.

d) D'après la question b, Λ contient $\mathscr{A} \times \mathscr{B}$, puisque pour tout $A \times B \in \mathscr{A} \times \mathscr{B}$, la section de $A \times B$ est soit B, soit $\varnothing$, qui sont tous deux éléments de $\mathscr{B}$.

e) Comme $\mathscr{A} \times \mathscr{B}$ est un π-système, le théorème de la classe monotone assure que $\sigma(\mathscr{A} \times \mathscr{B}) = \mathscr{A} \otimes \mathscr{B}$ est le plus petit λ-système contenant $\mathscr{A} \times \mathscr{B}$. Donc le λ-système Λ contient $\mathscr{A} \otimes \mathscr{B}$.

Exercice 3. Soit μ une mesure finie sur $(\mathbb{R}, \mathscr{B}or(\mathbb{R}))$ et F sa fonction de répartition. On cherche à montrer que F est de classe C^1 si et seulement si μ admet une densité par rapport à la mesure de Lebesgue λ qui est continue λ−p.p..

a) On suppose que F est de classe C^1. On désigne par ν la mesure de densité F' par rapport à la mesure de Lebesgue.

   i) Montrer que μ et ν ont la même fonction de répartition.

   ii) Conclure.

b) On suppose que μ admet une densité (partout) continue f par rapport à la mesure de Lebesgue.

   i) Pour tout $x \in \mathbb{R}$ et $\varepsilon > 0$, montrer que

$$\varepsilon \inf_{]x,x+\varepsilon]} f \le \int_{]x,x+\varepsilon]} f \, d\lambda \le \varepsilon \sup_{]x,x+\varepsilon]} f.$$

   ii) Montrer que F est dérivable à droite et caractériser cette dérivée.

   iii) Conclure.

Solution de l'exercice 3.

a) i) Comme F' est continue, F' est bornée sur tout intervalle compact $[a, b]$, et donc d'après le Théorème 9.7 du cours de LM 364, $F(b) - F(a) = \int_{[a,b]} F' \, d\lambda$. Or par définition de ν, $\nu(]a, b]) = \int_{]a,b]} F' \, d\lambda = \int_{[a,b]} F' \, d\lambda = F(b) - F(a)$. En faisant tendre $a \to -\infty$, par continuité à gauche de la mesure, on obtient $\nu(] - \infty, b]) = F(b) - \lim_{a \to -\infty} F(a) = F(b)$. Par conséquent, F est la fonction de répartition de ν.

   ii) Par le Théorème 1.26 du cours de LM 365, ν et μ ayant même fonction de répartition, sont égales. Donc μ admet F' comme densité (par rapport à λ), qui est continue par hypothèse, donc continue λ−p.p..

   Remarque : si l'on voulait utiliser le résultat plus général d'unicité, en se basant sur le fait que μ et ν coïncident sur le π-système $\{] - \infty, b], b \in \mathbb{R}\} \cup \mathbb{R}$, il fallait aussi montrer que $\mu(\mathbb{R}) = \nu(\mathbb{R})$ (pour cela, il suffit de faire tendre $b \to \infty$ et d'utiliser à nouveau la continuité à gauche de la mesure).

b) i) Pour tout $y \in]x, x+\varepsilon]$, on a

$$\inf_{]x,x+\varepsilon]} f \leq f(y) \leq \sup_{]x,x+\varepsilon]} f,$$

donc par croissance de l'intégrale,

$$\varepsilon \inf_{]x,x+\varepsilon]} f = \int_{]x,x+\varepsilon]} \inf_{]x,x+\varepsilon]} f \, d\lambda \leq \int_{]x,x+\varepsilon]} f(y) \, d\lambda(y) \leq \int_{]x,x+\varepsilon]} \sup_{]x,x+\varepsilon]} f \, d\lambda = \varepsilon \sup_{]x,x+\varepsilon]} f,$$

ce qui n'est autre que l'inégalité demandée.

ii) Puisque $\int_{]x,x+\varepsilon]} f \, d\lambda = F(x+\varepsilon) - F(x)$, on a

$$\inf_{]x,x+\varepsilon]} f \leq \frac{F(x+\varepsilon) - F(x)}{\varepsilon} \leq \sup_{]x,x+\varepsilon]} f.$$

Par continuité de f, chaque membre de l'inégalité tend vers $f(x)$ lorsque $\varepsilon \to 0$, donc F est dérivable à droite en x, de dérivée à droite $f(x)$.

iii) Le raisonnement est le même pour obtenir la dérivabilité de F à gauche. On obtient donc que F est dérivable de dérivée f, qui est continue. Donc F est de classe C^1. Dans le cas où f est seulement continue $\lambda-$p.p., on applique la question précédente à la fonction continue g telle que $f = g$ $\lambda-$p.p..

Exercice 4. Soit μ une mesure finie sur $E = \mathbb{R}^d$ muni de sa tribu borélienne $\mathscr{A}$, et $f : (E, \mathscr{A}) \to (\mathbb{R}, \mathscr{B}or(\mathbb{R}))$ un élément de $\mathscr{L}^1(\lambda)$ tel que $\int_E f \, d\lambda = 1$, où λ désigne ici la mesure de Lebesgue sur E. On cherche à montrer que pour toute fonction $h : E \to \mathbb{R}$ continue et bornée, $\lim_{\sigma \to 0} I_\sigma = \int_E h \, d\mu$, où

$$I_\sigma = \int_{E \times E} d(\lambda \otimes \mu)(x,y) \, f(x) \, h(y + \sigma x).$$

On utilisera les notations $C := \sup_{x \in E} |\, h(x) \,|$ et $K := \mu(E)$.

a) Soit $F_\sigma(y) = \int_E d\lambda(x) \, f(x) \, h(y + \sigma x)$. Montrer que $I_\sigma = \int_E F_\sigma \, d\mu$.

b) Montrer que pour tout $y \in E$, $\lim_{\sigma \to 0} F_\sigma(y) = h(y)$.

c) Conclure.

Solution de l'exercice 4. On remarquera que λ et μ sont σ-finies, ce qui permet de définir $\lambda \otimes \mu$ et d'appliquer les théorèmes de Fubini.

a) La valeur absolue de l'intégrand dans I_σ est majorée par $C|\, f(x) \,|$. Or la fonction $(x,y) \mapsto |\, f(x) \,|$ est $\lambda \otimes \mu-$intégrable car d'après le théorème de Fubini–Tonelli,

$$\int_{E \times E} d(\lambda \otimes \mu)(x,y) \, |\, f(x) \,| = \int_E d\lambda(x) \int_E d\mu(y) \, |\, f(x) \,| = K \int_E d\lambda(x) \, |\, f(x) \,| < \infty.$$

Donc d'après le théorème de Fubini–Lebesgue,

$$\begin{aligned} I_\sigma &= \int_{E\times E} d(\lambda\otimes\mu)(x,y)\, f(x)\, h(y+\sigma x) \\ &= \int_E d\lambda(x) \int_E d\mu(y)\, f(x)\, h(y+\sigma x) \\ &= \int_E d\mu(y) \int_E d\lambda(x)\, f(x)\, h(y+\sigma x) \\ &= \int_E d\mu(y)\, F_\sigma(y). \end{aligned}$$

b) Pour tout $y \in E$, la valeur absolue de la fonction $x \mapsto f(x)\, h(y+\sigma x)$ est majorée par $C|\,f\,|$, qui est $\lambda-$intégrable, donc par le théorème de convergence dominée,

$$\lim_{\sigma\to 0} F_\sigma(y) = \int_E d\lambda(x)\, f(x)\, \lim_{\sigma\to 0} h(y+\sigma x) = \int_E d\lambda(x)\, f(x)\, h(y),$$

car h est continue, et cette dernière expression vaut $h(y)$, car $\int_E f\, d\lambda = 1$.

c) Pour tout $y \in E$,

$$|\, F_\sigma(y)\,| \leq \int_E d\lambda(x)\, |\, f(x)\, h(y+\sigma x)\,| \leq C \int_E d\lambda(x)\, |\, f(x)\,| < \infty.$$

Donc la fonction F_σ est dominée en valeur absolue par une fonction constante. Comme les fonctions constantes sont $\mu-$intégrables, le théorème de convergence dominée assure que

$$\lim_{\sigma\to 0} I_\sigma = \lim_{\sigma\to 0} \int_E F_\sigma\, d\mu = \int_E d\mu(y) \lim_{\sigma\to 0} F_\sigma(y) = \int_E d\mu(y)\, h(y).$$