Examen final du 30 mai 2011 (1ère session)

Durée : 2 heures. Tous documents interdits. La qualité et la rigueur de la rédaction seront prises en compte. En particulier, chaque application d'une définition ou d'un résultat du cours devra être justifiée, brièvement mais scrupuleusement.

Exercice 1. Soient μ et ν deux mesures finies sur $(\mathbb{R}^2, \mathscr{B}(\mathbb{R}^2))$ et $\mathscr{H}$ l'ensemble des fonctions $h : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ s'écrivant sous la forme $h(x, y) = f(x)g(y)$, où $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ sont des fonctions continues bornées. On suppose que $\int h\, d\mu = \int h\, d\nu$ pour tout $h \in \mathscr{H}$, et l'on cherche à en déduire que $\mu = \nu$.

a) Montrer que pour tout intervalle A de $\mathbb{R}$ il existe une suite de fonctions continues à valeurs dans $[0, 1]$ convergeant simplement vers $\mathbb{1}_A$.

b) Soient A et B deux intervalles de $\mathbb{R}$. Montrer qu'il existe une suite d'éléments de $\mathscr{H}$ à valeurs dans $[0, 1]$, convergeant simplement vers $\mathbb{1}_{A\times B}$.

c) En déduire que $\mu(A \times B) = \nu(A \times B)$.

d) Conclure.

Solution de l'exercice 1.

a) Si $A =]a, b[$, on prend f_n l'interpolation linéaire de la fonction qui vaut 0 sur ${}^{c}A$ et 1 sur $[a + 1/n, b - 1/n]$, dès que n est suffisamment grand. Le cas d'intervalles semi-ouverts ou fermés se traite de la même manière.

b) Soit (f_n) (resp. (g_n)) une suite de fonctions construites comme précédemment et convergeant vers A (resp. B). Soit $h_n(x, y) = f_n(x)g_n(y)$. Comme f_n et g_n sont continues, h_n est continue. Comme f_n et g_n prennent leurs valeurs dans $[0, 1]$, c'est aussi le cas de h_n. Enfin, $\lim_n f_n(x) = \mathbb{1}_A(x)$ et $\lim_n g_n(y) = \mathbb{1}_B(y)$, donc $\lim_n h_n(x, y) = \mathbb{1}_A(x)\, \mathbb{1}_B(y) = \mathbb{1}_{A\times B}(x, y)$.

c) Soit $A\times B$ un produit d'intervalles quelconque, et (h_n) la suite d'éléments de $\mathscr{H}$ construite comme précédemment et convergeant vers $\mathbb{1}_{A\times B}$. Par hypothèse, $\int h_n\, d\mu = \int h_n\, d\nu$. Comme ces fonctions sont toutes dominées par $\mathbb{1}_{\mathbb{R}^2}$ qui est μ-intégrable et ν-intégrable (car μ et ν sont finies), une double application du théorème de convergence dominée assure que $\mu(A \times B) = \nu(A \times B)$.

d) La famille des produits d'intervalles est un π-système engendrant $\mathscr{B}(\mathbb{R}^2)$ donc comme μ et ν sont finies et coïncident sur ce π-système, elles coïncident sur $\mathscr{B}(\mathbb{R}^2)$.

Exercice 2. Soit $(E_1, \mathscr{A}_1, \mu_1)$ et $(E_2, \mathscr{A}_2, \mu_2)$ deux espaces mesurés σ-finis. On notera invariablement $\|\cdot\|_p$ les normes associées à $L^p(\mu_1)$ et à $L^p(\mu_2)$.
Soit $\Psi : L^1(\mu_1) \to L^1(\mu_2)$ une application linéaire continue. On rappelle que la norme de l'application linéaire Ψ, notée ici $|||\Psi|||$, est définie par $|||\Psi||| := \sup\{\|\Psi(f)\|_1/\|f\|_1, f \neq 0\} < \infty$, et que Ψ est $|||\Psi|||$-lipschitzienne.

a) i) Montrer que l'application

$$\begin{aligned} \Phi : L^1(\mu_1) &\longrightarrow \mathbb{R} \\ f &\longmapsto \int_{E_2} \Psi(f)\, d\mu_2 \end{aligned}$$

est linéaire.

ii) Montrer que Φ est lipschitzienne.

iii) En déduire qu'il existe $\varphi \in L^\infty(\mu_1)$ tel que pour tout $f \in L^1(\mu_1)$,

$$\int_{E_2} \Psi(f)\, d\mu_2 = \int_{E_1} f\varphi\, d\mu_1.$$

Dans la suite de l'exercice, nous nous intéressons à des exemples d'applications linéaires continues Ψ. Dans les deux questions suivantes, $(E_1, \mathscr{A}_1, \mu_1) = (E_2, \mathscr{A}_2, \mu_2) = (\mathbb{R}^d, \mathscr{B}(\mathbb{R}^d), \lambda)$ où λ désigne la mesure de Lebesgue.

b) Soit $a \in \mathbb{R}^d$. On note $\tau_a f$ l'application $x \mapsto f(x+a)$. Soit Ψ l'application linéaire

$$\begin{aligned} \Psi : L^1(\mathbb{R}^d, \mathscr{B}(\mathbb{R}^d), \lambda) &\longrightarrow L^1(\mathbb{R}^d, \mathscr{B}(\mathbb{R}^d), \lambda) \\ f &\longmapsto \tau_a f \end{aligned}$$

i) Montrer que Ψ est lipschitzienne et calculer $\|\!|\Psi|\!\|$.

ii) Caractériser φ.

c) Soient $g \in L^1(\lambda)$ et

$$\begin{aligned} \Psi : L^1(\mathbb{R}^d, \mathscr{B}(\mathbb{R}^d), \lambda) &\longrightarrow L^1(\mathbb{R}^d, \mathscr{B}(\mathbb{R}^d), \lambda) \\ f &\longmapsto f \star g \end{aligned}$$

i) Démontrer que $f \star g$ est bien définie λ-p.p. et λ-intégrable.

ii) Montrer que Ψ est linéaire, puis montrer qu'elle est lipschitzienne.

iii) Caractériser φ.

d) Soit $g : (E_1 \times E_2, \mathscr{A}_1 \otimes \mathscr{A}_2) \to (\mathbb{R}, \mathscr{B}(\mathbb{R}))$ une fonction mesurable.

i) Dire pourquoi

$$\begin{aligned} G : (E_1, \mathscr{A}_1) &\longrightarrow (\mathbb{R}, \mathscr{B}(\mathbb{R})) \\ t &\longmapsto \int_{E_2} |g(t,x)|\, d\mu_2(x) \end{aligned}$$

est mesurable.

On suppose dorénavant que $G \in L^\infty(\mu_1)$.

ii) Pour tout $f \in L^1(\mu_1)$, montrer que l'intégrale $\int_{E_1} f(t)\, g(t,x)\, d\mu_1(t)$ est définie pour μ_2-presque tout x et que la fonction $\Psi(f) : x \mapsto \int_{E_1} f(t)\, g(t,x)\, d\mu_1(t)$ est μ_2-intégrable.

Indication. On commencera par calculer $\int_{E_2} d\mu_2(x) \int_{E_1} d\mu_1(t)\, |f(t)|\, |g(t,x)|$.

iii) Montrer que $\Psi : L^1(\mu_1) \to L^1(\mu_2)$ est lipschitzienne.

iv) Caractériser φ.

e) Dans cette dernière question, nous considérons l'exemple précédent dans le cas particulier où $(E_1, \mathscr{A}_1, \mu_1) = (E_2, \mathscr{A}_2, \mu_2) = ([0,1], \mathscr{B}([0,1]), \lambda)$ et $g(t,x) = (x-t)^{-\alpha} \mathbb{1}_{0 \leq t \leq x \leq 1}$, avec $\alpha \in]0,1[$.

   i) Calculer $\|G\|_\infty$.

   ii) Avec $f_n := \mathbb{1}_{[0,\frac{1}{n}]}$, calculer $\|f_n\|_1$ et $\|\Psi(f_n)\|_1$.

   iii) En déduire que $\|\Psi\| = \frac{1}{1-\alpha}$.

Solution de l'exercice 2.

a) i) Comme $\Psi(f)$ et $\Psi(g)$ sont μ_2-intégrables, on peut utiliser la linéarité de l'intégrale :

$$\Phi(af+g) = \int_{E_2} \Psi(af+g)\, d\mu_2 = \int_{E_2} (a\Psi(f)+\Psi(g))\, d\mu_2 = a\int_{E_2} \Psi(f)\, d\mu_2 + \int_{E_2} \Psi(g)\, d\mu_2,$$

qui n'est autre que $a\Phi(f) + \Phi(g)$.

   ii) Comme Ψ est $\|\Psi\|$-lipschitzienne,

$$|\Phi(f)| \leq \int_{E_2} |\Psi(f)(x)|\, d\mu_2(x) = \|\Psi(f)\|_1 \leq \|\Psi\|.\|f\|_1,$$

et Φ est donc également $\|\Psi\|$-lipschitzienne.

   iii) La forme linéaire Φ sur $L^1(\mu_1)$ est donc continue, et comme μ_1 est σ-finie, le théorème de dualité L^p-L^q ($p = 1$, $q = \infty$) assure qu'il existe $\varphi \in L^\infty(\mu_1)$ tel que pour tout $f \in L^1(\mu_1)$,

$$\Phi(f) = \int_{E_1} f\varphi\, d\mu_1.$$

b) i) Par changement de variable, $\|\Psi(f)\|_1 = \int_{\mathbb{R}^d} |f(x+a)|\, d\lambda(x) = \|f\|_1$, donc Ψ est une isométrie, en particulier $\|\Psi\| = 1$ (et Ψ est 1-lipschitzienne).

   ii) Par le même changement de variable $\Psi(f) = \int_{\mathbb{R}^d} f\, d\lambda$, donc φ peut être choisie identiquement égale à 1.

c) i) C'est un résultat du cours mais ici on peut le voir directement par le théorème de Fubini–Tonelli et le même changement de variable que précédemment :

$$\int_{\mathbb{R}^d} |f| \star |g|(x)\, d\lambda(x) = \int_{\mathbb{R}^d} d\lambda(x) \int_{\mathbb{R}^d} d\lambda(y)\, |f(y)|\, |g(x-y)| = \|f\|_1.\|g\|_1 < \infty.$$

Ceci implique que $|f| \star |g|$ est fini λ-p.p., et donc que $f \star g$ est bien définie λ-p.p. et est λ-intégrable (d'intégrale majorée en valeur absolue par $\|f\|_1.\|g\|_1$).

   ii) Soient $f_1, f_2 \in L^1(\mu_1)$ et soit x tel que les fonctions $y \mapsto f_1(y)\, g(x-y)$ et $y \mapsto f_1(y)\, g(x-y)$ sont intégrables (l'ensemble des tels x est de complémentaire négligeable). Alors par linéarité de l'intégrale,

$$\begin{aligned}
\Psi(af_1 + f_2)(x) &= \int_{\mathbb{R}^d} d\lambda(y)\, (af_1(y)\, g(x-y) + f_2(y)\, g(x-y)) \\
&= a\int_{\mathbb{R}^d} d\lambda(y)\, f_1(y)\, g(x-y) + \int_{\mathbb{R}^d} d\lambda(y)\, f_2(y)\, g(x-y) \\
&= af_1 \star g(x) + f_2 \star g(x).
\end{aligned}$$

On a donc l'égalité $\Psi(af_1 + f_2)(x) = a\Psi(f_1)(x) + \Psi(f_2)(x)$ pour λ-presque tout x, autrement dit $\Psi(af_1 + f_2) = a\Psi(f_1) + \Psi(f_2)$.
De plus, $\|\Psi(f)\|_1 \leq \int |f| \star |g|\, d\lambda = \|f\|_1.\|g\|_1$, donc Ψ est $\|g\|_1$-lipschitzienne.

iii) Par le théorème de Fubini–Lebesgue, $\Phi(f) = \left(\int f\,d\lambda\right)\left(\int g\,d\lambda\right)$, donc φ peut être choisie identiquement égale à $\int g\,d\lambda$.

d) i) La mesurabilité de G est la première assertion du théorème de Fubini–Tonelli.

ii) D'après la deuxième assertion de ce même théorème,

$$\begin{aligned}
\int_{E_2} d\mu_2(x) \int_{E_1} |f(t)|\,|g(t,x)|\,d\mu_1(t) &= \int_{E_1} d\mu_1(t)\,|f(t)| \int_{E_2} |g(t,x)|\,d\mu_2(x) \\
&= \int_{E_1} d\mu_1(t)\,|f(t)|\,G(t) \\
&= \int_{\{G\leq\|G\|_\infty\}} d\mu_1(t)\,|f(t)|\,G(t) \\
&\leq \|G\|_\infty \int_{E_1} d\mu_1(t)\,|f(t)| \\
&= \|G\|_\infty.\|f\|_1 < \infty.
\end{aligned}$$

Ainsi, d'après le théorème de Fubini–Lebesgue, l'intégrale $\int_{E_1} |f(t)|\,|g(t,x)|\,d\mu_1(t)$ est finie pour μ_2-presque tout x, et l'intégrale $\int_{E_1} f(t)\,g(t,x)\,d\mu_1(t)$ est définie (et finie) pour μ_2-presque tout x. De plus, nous venons de montrer que $\int_{E_2} |\Psi(f)|\,d\mu_2 \leq \|G\|_\infty.\|f\|_1$.

iii) D'après ce qui précède, $\Psi(f)$ est $\|G\|_\infty$-lipschitzienne.

iv) En appliquant à nouveau le théorème de Fubini–Lebesgue, on obtient

$$\int_{E_2} \Psi(f)\,d\mu_2 = \int_{E_1} d\mu_1(t)\,f(t) \int_{E_2} g(t,x)\,d\mu_2(x),$$

et donc le choix $\varphi(t) = \int_{E_2} g(t,x)\,d\mu_2(x)$ convient.

e) Dans le reste de l'exercice, nous considérons l'exemple précédent dans le cas particulier où $(E_1, \mathscr{A}_1, \mu_1) = (E_2, \mathscr{A}_2, \mu_2) = ([0,1], \mathscr{B}([0,1]), \lambda)$ et $g(t,x) = (x-t)^{-\alpha}\mathbb{1}_{0\leq t\leq x\leq 1}$, avec $\alpha \in]0,1[$.

i) Le calcul donne $\|G\|_\infty = \frac{1}{1-\alpha}$.

ii) Le calcul donne $\|f_n\|_1 = 1/n$ et

$$\|\Psi(f_n)\|_1 = \frac{1}{(1-\alpha)(2-\alpha)}\left(1 - \left(1 - \frac{1}{n}\right)^{2-\alpha}\right).$$

iii) Lorsque $n \to \infty$, $\|\Psi(f_n)\|_1/\|f_n\|_1 \longrightarrow \frac{1}{1-\alpha}$, donc $\|\Psi\| \geq \frac{1}{1-\alpha}$. D'autre part, on sait que Ψ est $\|G\|_\infty$-lipschizienne, donc $\|\Psi\| \leq \|G\|_\infty = \frac{1}{1-\alpha}$, d'où le résultat.