Examen final du 4 juin 2012 (1ère session)

Durée : 2 heures. Tous documents interdits. On désignera invariablement par λ la mesure de Lebesgue et l'on abrégera parfois, comme il est d'usage, $d\lambda(x)$ en dx.

Exercice 1. Dans cet exercice, on note $\|\cdot\|_p$ la norme associée à l'espace $L^p := L^p_{\mathbb{C}}(\mathbb{R}, \mathscr{B}(\mathbb{R}), \lambda)$. Pour $f \in L^1$, on désigne par $\hat{f}$ la transformée de Fourier de f, c'est-à-dire $\hat{f}(u) = \int_{\mathbb{R}} f(x)\, e^{-iux}\, dx$, et l'on rappelle que si $\hat{f} \in L^1$ alors pour λ-presque tout x,

$$f(x) = (2\pi)^{-1} \int_{\mathbb{R}} \hat{f}(u)\, e^{iux}\, du.$$

Soient $g, h \in L^1$ telles que $\hat{g} \in L^1$ et $\| \hat{h} \|_\infty < 1$. On cherche à résoudre dans L^1 l'équation

$$f = g + h \star f, \tag{1}$$

où $\star$ désigne le produit de convolution usuel.

a) Montrer que la fonction $F := \hat{g}/(1 - \hat{h})$ est bien définie λ-p.p. et que $F \in L^1$, grâce à la majoration $\| F \|_1 \le \| \hat{g} \|_1/(1 - \| \hat{h} \|_\infty)$.

b) i) Montrer que si f est solution de (1), alors $f = f_1$ λ-p.p., où

$$f_1(x) := (2\pi)^{-1} \int_{\mathbb{R}} \frac{\hat{g}(u)}{1 - \hat{h}(u)}\, e^{iux}\, du, \qquad x \in \mathbb{R}.$$

ii) Montrer avec rigueur et précaution que f_1 est bien solution de (1).

Solution de l'exercice 1.

a) L'inégalité $| \hat{h} | \le \| \hat{h} \|_\infty < 1$ λ-p.p. implique d'abord que $| \hat{h} | < 1$ λ-p.p., et donc $h \neq 1$ λ-p.p., si bien que F est bien définie λ-p.p. Elle implique également que $| F | \le | \hat{g} |/(1 - \| \hat{h} \|_\infty)$ λ-p.p., par conséquent, $\| F \|_1 \le \| \hat{g} \|_1/(1 - \| \hat{h} \|_\infty) < \infty$.

b) i) Soit f solution de (1). La transformée de Fourier étant un morphisme de groupes, $\hat{f} = \hat{g} + \hat{h}\, \hat{f}$, d'où $\hat{f} = F$ (λ-p.p. ; ce que nous pouvons omettre, f étant pris comme élément de L^1, donc défini λ-p.p.). Comme $F \in L^1$, on peut lui appliquer l'inverse de la transformée de Fourier, si bien que $f = f_1$ λ-p.p.

ii) Soit $G_x(u, y) = h(y)\, F(u)\, e^{iu(x-y)}$. Par Fubini–Tonelli,

$$\int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}} | G_x(u, y) |\, du\, dy \le \| F \|_\infty \, \| h \|_\infty < \infty,$$

et l'on peut donc appliquer Fubini–Lebesgue à G_x, pour tout $x \in \mathbb{R}$:

$$\begin{aligned} h \star f_1(x) &= (2\pi)^{-1} \int_{\mathbb{R}} dy\, h(y) \int_{\mathbb{R}} du\, F(u)\, e^{iu(x-y)} \\ &= (2\pi)^{-1} \int_{\mathbb{R}} du\, F(u)\, e^{iux} \int_{\mathbb{R}} dy\, h(y)\, e^{-iuy} \\ &= (2\pi)^{-1} \int_{\mathbb{R}} du\, F(u)\, \hat{h}(u)\, e^{iux} \\ &= -(2\pi)^{-1} \int_{\mathbb{R}} du\, (F(u) + \hat{g}(u))\, e^{iux} \\ &= f_1(x) - g(x), \end{aligned}$$

où la dernière ligne est l'inversion de la transformée de Fourier de g (car $\hat{g} \in L^1$), si bien que $h \star f_1 + g = f_1$.

Exercice 2. Soit E un espace métrique localement compact et séparable, et μ une mesure de Borel sur $(E, \mathscr{B}(E))$. Soit $(f_n)_n$ une suite de fonctions boréliennes *convergeant localement dans* L^p $(1 \leq p < \infty)$ vers f, au sens où pour tout compact K de E, $\lim_{n\to\infty} \int_K |\, f_n - f\,|^p \, d\mu = 0$. On cherche à montrer, par le procédé d'extraction diagonale de Cantor, que $(f_n)_n$ admet une sous-suite qui converge μ-p.p. vers f.
Soit $(E_n)_n$ une partition dénombrable de E telle que pour tout $n \in \mathbb{N}$, E_n est inclus dans un compact de E.

a) Montrer qu'il existe un borélien $A_0 \subseteq E_0$ tel que $\mu(E_0 \setminus A_0) = 0$, et une sous-suite de $(f_n)_n$, que l'on notera $(f_n^{(0)})_n$, qui converge vers f partout sur A_0.
b) Montrer que pour k parcourant $\mathbb{N}$, on peut trouver des sous-suites $(f_n^{(k)})_n$ de $(f_n)_n$ et des boréliens $A_k \subseteq E_k$ tels que $\mu(E_k \setminus A_k) = 0$ et $(f_n^{(k+1)})_n$ est une sous-suite de $(f_n^{(k)})_n$ qui converge vers f partout sur A_{k+1}.
   On définit à présent $g_n := f_n^{(n)}$ et $A := \cup_{k=0}^{\infty} A_k$.
c) Montrer que pour tout $k \in \mathbb{N}$, $(g_n)_{n\geq k}$ est une sous-suite de $(f_n^{(k)})_n$.
d) Montrer que $(g_n)_n$ converge vers f partout sur A.
e) Montrer que $\mu(E \setminus A) = 0$ et conclure.
f) Les deux sous-questions suivantes sont indépendantes l'une de l'autre.
   i) Comment peut-on définir la convergence locale dans L^∞ ? Que se passe-t-il si $(f_n)_n$ converge localement dans L^∞ vers f ?
   ii) Exhiber une suite $(f_n)_n$ qui converge vers une fonction f localement dans L^p (pour tout $p \in [1, +\infty]$), mais dont aucune sous-suite ne converge vers f dans L^p.

Solution de l'exercice 2.

a) Comme E_0 est inclus dans un compact, $\lim_{n\to\infty} \int_{E_0} |\, f_n - f\,|^p \, d\mu = 0$. Ainsi, (f_n) converge vers f dans $L^p(\mu')$, où μ' est la mesure trace de μ sur E_0. Il existe donc une sous-suite $(f_n^{(0)})$ de (f_n) qui converge vers f μ'-p.p., c'est-à-dire qu'il existe un borélien A_0' tel que $\mu'(E \setminus A_0') = 0$ sur lequel $(f_n^{(0)})$ converge vers f. Il suffit alors de prendre $A_0 = A_0' \cap E_0$.
b) Par récurrence sur k, on applique la procédure précédente à $(f_n^{(k)})$ et à E_k.
c) Par construction, pour tout $k' \geq k$, $(f_n^{(k')})$ est une sous-suite de $(f_n^{(k)})$, donc $g_{k'}$ est un élément de la suite $(f_n^{(k')})$, donc un élément de la suite $(f_n^{(k)})$.

d) Comme la suite $(f_n^{(k)})$ converge partout vers f sur A_k, c'est aussi le cas de sa sous-suite $(g_n)_{n\geq k}$, et donc de $(g_n)_n$. Donc pour tout $x \in A_k$, $(g_n(x))_n$ converge vers $f(x)$. Or pour tout $x \in A$, il existe k tel que $x \in A_k$, donc $(g_n(x))_n$ converge vers $f(x)$.

e) On sait que $A_k \subseteq E_k$, que $\mu(E_k \setminus A_k) = 0$ et que les (E_k) forment une partition de E. Ceci implique que $E \setminus A = \cup_k (E_k \setminus A_k)$, où la dernière réunion est disjointe, et ainsi $\mu(E \setminus A) = \sum_k \mu(E_k \setminus A_k) = 0$. La suite (g_n) est donc une sous-suite de f qui converge μ-p.p., car partout sur A.

f) i) Supposons que pour tout compact K de E le supremum essentiel de $|\, f_n - f \,|$ sur K tend vers 0 quand $n \to \infty$. Alors on sait que (f_n) converge vers f μ-p.p. sur K. Il est facile de voir qu'alors (f_n) converge μ-p.p. (et il n'est donc même pas nécessaire de prendre une sous-suite).

ii) Prendre (par exemple) pour f_n l'indicatrice de $[n, n+1]$ (la bosse glissante) et $\mu = \lambda$. Alors (f_n) converge localement dans L^p ($p \in [1, +\infty]$) et p.p. vers la fonction nulle, mais $\|\, f_n \,\|_p = 1$ pour tous p et n, donc aucune sous-suite de (f_n) ne peut converger dans L^p vers la fonction nulle.

Exercice 3. Soient $p \in [1, +\infty[$ et $f, f_0, f_1, f_2, \ldots$ des éléments de $L^p := L^p_{\mathbb{R}}(\mathbb{R}_+, \mathscr{B}(\mathbb{R}_+), \lambda)$ toutes localement intégrables, telles que $(f_n)_n$ converge vers f dans L^p. On fixe une constante $c \in \mathbb{R}$ et l'on définit pour $x \in \mathbb{R}_+$

$$F(x) := c + \int_0^x f(t)\, dt \qquad \text{et} \qquad F_n(x) := c + \int_0^x f_n(t)\, dt, \qquad n \in \mathbb{N}.$$

a) Soit $M > 0$.

i) Montrer l'inégalité suivante

$$\int_0^M |\, F_n(x) - F(x) \,|^p \, dx \leq M^{p+1} \left(\int_0^M |\, f_n(t) - f(t) \,| \frac{dt}{M} \right)^p$$

ii) En déduire l'inégalité suivante

$$\int_0^M |\, F_n(x) - F(x) \,|^p \, dx \leq M^p \,\|\, f_n - f \,\|_p^p$$

iii) Utiliser le résultat de l'exercice précédent pour justifier soigneusement que la suite (F_n) admet une sous-suite qui converge λ-p.p. vers F.

b) Montrer que si la suite $(\|\, F_n \,\|_p)_n$ est bornée, alors $F \in L^p$.

Solution de l'exercice 3.

a) i) L'inégalité à montrer est élémentaire

$$\begin{aligned}
\int_0^M dx \,|\, F_n(x) - F(x) \,|^p &= \int_0^M dx \left| \int_0^x (f_n(t) - f(t))\, dt \right|^p \\
&\leq \int_0^M dx \left(\int_0^x |\, f_n(t) - f(t) \,|\, dt \right)^p \\
&\leq \int_0^M dx \left(\int_0^M |\, f_n(t) - f(t) \,|\, dt \right)^p \\
&= M \left(\int_0^M |\, f_n(t) - f(t) \,|\, dt \right)^p,
\end{aligned}$$

d'où le résultat.

ii) $M^{-1}\lambda$ étant une probabilité sur $[0, M]$ et $x \mapsto x^p$ étant convexe sur $\mathbb{R}_+$, l'inégalité de Jensen assure que

$$\left(\int_0^M \mid f_n(t) - f(t) \mid \frac{dt}{M}\right)^p \leq \int_0^M \mid f_n(t) - f(t) \mid^p \frac{dt}{M} \leq \frac{1}{M} \int_0^\infty \mid f_n(t) - f(t) \mid^p dt.$$

Le résultat de la question précédente implique alors

$$\int_0^M dx \mid F_n(x) - F(x) \mid^p \leq M^p \int_0^\infty \mid f_n(t) - f(t) \mid^p dt,$$

qui n'est autre que le résultat voulu.

iii) Comme (f_n) converge vers f dans L^p, le résultat de la question précédente implique que pour tout compact K de $\mathbb{R}$, $\int_K \mid F_n(x) - F(x) \mid^p dx \to 0$ lorsque $n \to \infty$. Comme λ est une mesure de Borel, le résultat de l'exercice précédent implique que (F_n) admet une sous-suite qui converge λ-p.p.

b) Soit (G_n) une sous-suite de (F_n) qui converge λ-p.p. vers F. Par le lemme de Fatou,

$$\int_0^\infty \mid F \mid^p d\lambda \leq \liminf_{n\to\infty} \int_0^\infty \mid G_n \mid^p d\lambda = \liminf_{n\to\infty} \| G_n \|_p^p.$$

Or la suite $(\| F_n \|_p)_n$ est bornée, donc sa sous-suite $(\| G_n \|_p)_n$ l'est aussi, si bien que $\int_0^\infty \mid F \mid^p d\lambda < \infty$.