Examen final du 19 juin 2018 (2ème session)

Durée : 2 heures. Tous documents interdits. Dans tout l'examen on travaille sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathscr{A}, P)$. La qualité et la rigueur de la rédaction seront prises en compte.

Exercice 1. Indépendance. Soient $n \geq 1$ et $X_0, X_1, \ldots, X_n$ des v.a.r. telles que pour tout $k \in \{1, \ldots, n\}$, X_k est indépendante du k-uplet $(X_0, \ldots, X_{k-1})$, c'est-à-dire que pour toutes fonctions $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ et $g : \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}$ toutes deux positives ou toutes deux bornées,

$$E(f(X_k)\, g(X_0, \ldots, X_{k-1})) = E(f(X_k))\, E(g(X_0, \ldots, X_{k-1})).$$

Montrer l'indépendance des v.a. $(X_0, \ldots, X_n)$.

Solution de l'exercice 1. Il nous faut montrer que pour toutes fonctions $f_j : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $j = 0, \ldots, n$ toutes positives ou toutes bornées

$$E\left(\prod_{j=0}^{n} f_j(X_j)\right) = \prod_{j=0}^{n} E\left(f_j(X_j)\right).$$

Nous allons montrer par récurrence sur k que pour tout $k \in \{1, \ldots, n\}$,

$$E\left(\prod_{j=0}^{k} f_j(X_j)\right) = \prod_{j=0}^{k} E\left(f_j(X_j)\right).$$

L'initialisation $k = 1$ est une hypothèse (prendre $k = 1$, $f = f_1$ et $g = f_0$). Montrons l'hérédité. Par hypothèse, en prenant $f = f_k$ et g définie par $g(x_0, \ldots, x_{k-1}) = \prod_{j=0}^{k-1} f_j(x_j)$, on obtient

$$E\left(\prod_{j=0}^{k} f_j(X_j)\right) = E(f_k(X_k))\, E\left(\prod_{j=0}^{k-1} f_j(X_j)\right).$$

En appliquant l'hypothèse de récurrence au rang $k - 1$, on obtient

$$E\left(\prod_{j=0}^{k} f_j(X_j)\right) = E(f_k(X_k)) \prod_{j=0}^{k-1} E\left(f_j(X_j)\right) = \prod_{j=0}^{k} E\left(f_j(X_j)\right).$$

Exercice 2. Nombre de fois où l'on tombe sur son propre numéro.
Soit n un entier positif non nul. On note $[n]$ l'ensemble $\{1, \ldots, n\}$. Soient $Y_1, \ldots, Y_n$ n variables aléatoires, toutes uniformément distribuées dans $[n]$. Pour tout $k \in [n]$, on définit A_k l'évènement $\{Y_k = k\}$ et X_n le nombre de k tels que $Y_k = k$:

$$X_n = \sum_{k=1}^{n} \mathbb{1}_{A_k}$$

a) Question préliminaire. Soit N une variable de Poisson de paramètre λ. Rappeler sa loi ainsi que (sans calcul) son espérance, sa variance et sa fonction génératrice.

b) Dans cette question, on suppose que les (Y_i) sont *indépendantes*.

  i) Donner la valeur de $P(A_k)$ et la loi de X_n.

  ii) Montrer que
$$P(X_n = 0) = \left(1 - \frac{1}{n}\right)^n,$$
et donner la limite de cette probabilité lorsque $n \to \infty$.

  iii) Exprimer la fonction génératrice de X_n, notée f_n. Donner également l'espérance et la variance de X_n.

  iv) Montrer que pour tout $s \in [0, 1]$, $\lim_{n\to\infty} f_n(s) = e^{s-1}$.

  v) En déduire que (X_n) converge dans un sens à préciser et caractériser sa limite.

c) Dans cette question, les (Y_i) ne sont *plus* indépendantes : on se donne une urne contenant n boules, numérotées de 1 à n, que l'on tire successivement hors de l'urne *sans remise*, à chaque fois uniformément au hasard, et Y_k désigne le numéro de la boule tirée au k-ième tirage.

  i) Montrer les deux égalités suivantes :
$$P(A_1) = \frac{1}{n} \quad \text{et} \quad P(A_1 \cap A_2) = \frac{1}{n(n-1)}.$$

  ii) Montrer l'égalité suivante pour tout $k \in [n]$:
$$P(A_1 \cap \cdots \cap A_k) = \frac{(n-k)!}{n!}$$
On admettra désormais que pour toutes parties disjointes I et J de $[n]$, la probabilité de l'évènement $(\cap_{i\in I} A_i) \cap \left(\cap_{j\in J} A_j^c\right)$ ne dépend que des cardinaux de I et J et pas de leurs indices (A^c désigne le complémentaire de A, une intersection indicée par $\varnothing$ est égale à Ω).

  iii) En vous servant de l'indication en italique précédente (avec I singleton et J vide) et des résultats de la question i), calculer $E(X_n)$.

  iv) De la même manière (avec I partie à deux éléments et J vide), calculer $\mathrm{Var}(X_n)$ après avoir montré que
$$X_n^2 = \sum_{i=1}^{n} \mathbb{1}_{A_i} + \sum_{i=1}^{n} \sum_{j\neq i, j=1}^{n} \mathbb{1}_{A_i \cap A_j}$$

  v) Question difficile. En vous servant à nouveau de l'indication en italique, montrer :
$$P(X_n = k) = \binom{n}{k} P(A_1 \cap \cdots \cap A_k)\, p_{n-k},$$
où l'on a noté $p_n = P(X_n = 0)$.

  vi) En admettant que $\lim_{n\to\infty} p_n = e^{-1}$, prouver que (X_n) converge en un sens à préciser et caractériser sa limite.

Solution de l'exercice 2.

a) D'après le cours,

$$P(N=n)=e^{-\lambda}\frac{\lambda^n}{n!} \qquad n\geq 0,$$

$E(N)=\mathrm{Var}(N)=\lambda$ et

$$f_N(s)=e^{-\lambda(1-s)} \qquad s\in[0,1].$$

b) i) Comme Y_k est uniforme, $P(A_k)=\frac{1}{n}$. Comme les (Y_k) sont indépendantes et de même loi, les $\mathbb{1}_{A_k}$ sont des v.a. de Bernoulli indépendantes et de même loi, donc X_n est une variable binomiale de paramètres n et $\frac{1}{n}$.

ii) Par définition de la loi binomiale, ou simplement parce que $X_n=0$ si et seulement si aucun A_k n'est réalisé (et qu'ils sont indépendants),

$$P(X_n=0)=\left(1-\frac{1}{n}\right)^n,$$

et ainsi $\lim_{n\to\infty}P(X_n=0)=\lim_{n\to\infty}e^{n\ln(1-1/n)}=e^{-1}$.

iii) Il est connu que pour tout $s\in[0,1]$,

$$f_n(s)=\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\left(1-\frac{1}{n}\right)^{n-k}\left(\frac{1}{n}\right)^k s^k=\left(1-\frac{1}{n}+\frac{s}{n}\right)^n,$$

que $E(X_n)=n(1/n)=1$ et que $\mathrm{Var}(X_n)=n(1/n)(1-1/n)=1-1/n$.

iv) Pour tout $s\in[0,1]$, $\lim_{n\to\infty}f_n(s)=\lim_{n\to\infty}e^{n\ln(1-(1-s)/n)}=e^{-(1-s)}$.

v) D'après la première question, $e^{-(1-s)}$ est la fonction génératrice d'une v.a. de Poisson de paramètre 1. D'après le cours, comme les fonctions génératrices des X_n convergent la fonction génératrice d'une v.a. de Poisson de paramètre 1, (X_n) converge en loi vers la loi de Poisson de paramètre 1.

c) Dans cette question, les (Y_i) ne sont *plus* indépendantes.

i) On a

$$P(A_1)=P(Y_1=1)=\frac{1}{n}$$

et

$$P(A_1\cap A_2)=P(Y_1=1,Y_2=2)=P(Y_1=1)\,P(Y_2=2|Y_1=1)=\frac{1}{n}\,\frac{1}{n-1}.$$

ii) Par récurrence

$$\begin{aligned}P(A_1\cap\cdots\cap A_{k+1})&=P(A_1\cap\cdots\cap A_k)\,P(A_1\cap\cdots\cap A_{k+1}|A_1\cap\cdots\cap A_k)\\&=\frac{(n-k)!}{n!}\,P(Y_1=1,\ldots,Y_{k+1}=k+1|Y_1=1,\ldots,Y_k=k)=\frac{(n-k)!}{n!}\,\frac{1}{n-k},\end{aligned}$$

où la dernière égalité vient du fait que conditionnellement à avoir tiré les boules numérotées 1 à k aux k premiers tirages, la probabilité de tirer la boule numérotée $k+1$ au $k+1$-ème tirage est uniforme parmi les $n-k$ boules restantes (contenant en particulier la boule $k+1$).

iii) Par linéarité de l'espérance,

$$E(X_n) = \sum_{k=1}^{n} P(A_k) = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{n} = 1.$$

iv) On écrit

$$X_n^2 = \left(\sum_{i=1}^{n} \mathbb{1}_{A_i}\right)\left(\sum_{j=1}^{n} \mathbb{1}_{A_j}\right) = \sum_{i=1}^{n} \mathbb{1}_{A_i}^2 + \sum_{i=1}^{n}\sum_{j\neq i} \mathbb{1}_{A_i}\,\mathbb{1}_{A_j} = \sum_{i=1}^{n} \mathbb{1}_{A_i} + \sum_{i=1}^{n}\sum_{j\neq i} \mathbb{1}_{A_i\cap A_j}.$$

En utilisant la linéarité de l'espérance, on obtient

$$E(X_n^2) = \sum_{i=1}^{n} P(A_i) + \sum_{i=1}^{n}\sum_{j\neq i} P(A_i\cap A_j) = \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{n} + \sum_{i=1}^{n}\sum_{j\neq i} \frac{1}{n(n-1)} = 1+1=2.$$

Par conséquent, $\mathrm{Var}(X_n) = E(X_n^2) - E(X_n)^2 = 2 - 1^2 = 1$.

v) On a

$$P(X_n=k) = \sum_{I:|I|=k} P((\cap_{i\in I}A_i)\cap(\cap_{i\in I^c}A_i^c)) = \sum_{I:|I|=k} P\left(\cap_{i\in I}A_i\right) P\left(\cap_{i\in I^c}A_i^c|Y_i=i,\forall i\in I\right)$$

Or d'après l'indication,

$$P\left(\cap_{i\in I^c}A_i^c|Y_i=i,\forall i\in I\right) = P\left(\cap_{i=k+1}^{n}A_i^c|Y_i=i,\forall i\in[k]\right) = p_{n-k}$$

Encore d'après l'indication,

$$P(X_n=k) = \sum_{I:|I|=k} P\left(\cap_{i\in[k]}A_i\right) p_{n-k} = \binom{n}{k} P(A_1\cap\cdots\cap A_k)\, p_{n-k}$$

vi) Grâce aux questions ii) et v),

$$P(X_n=k) = \binom{n}{k} P(A_1\cap\cdots\cap A_k)\, p_{n-k} = \binom{n}{k}\frac{(n-k)!}{n!}\,p_{n-k} = \frac{p_{n-k}}{k!}.$$

Grâce à l'indication,

$$\lim_{n\to\infty} P(X_n=k) = \lim_{n\to\infty}\frac{p_{n-k}}{k!} = \frac{e^{-1}}{k!},$$

qui est la loi de Poisson de paramètre 1. Par conséquent, X_n converge en loi vers la loi de Poisson de paramètre 1 comme à la question précédente.