Examen partiel du 26 octobre 2016

1. Dénombrement.

Soit E un ensemble fini de cardinal n. On note $S = \{(A, B) : A, B \in \mathscr{P}(E), A \cup B = E\}$. Le but de l'exercice est de calculer le cardinal de S, noté $\#S$.

a) Si E et F sont deux ensembles on notera F^E l'ensemble des fonctions de E dans F. Si E et F sont finis, montrer que $\#\left(F^E\right) = (\#F)^{\#E}$.

b) On note $\mathbb{1}_Y$ la fonction indicatrice de l'ensemble Y. Montrer que la fonction

$$\begin{array}{rccl} \Phi & : & S & \rightarrow & \{-1,0,1\}^E \\ & & (A,B) & \mapsto & \mathbb{1}_A - \mathbb{1}_B \end{array}$$

est une bijection.

c) Déduire le cardinal de S.

Solution de l'exercice 1.

a) Une fonction est la donnée d'une affectation à chaque élément de E d'un élément de F. Il y a $\#F$ faqns d'affecter une valeur à chaque élement de E, donc $(\#F)^{\#E}$ fonctions possibles.

b) — **Injective :** Soit (A, B) et (A', B') tel que

$$\mathbb{1}_A - \mathbb{1}_B = \mathbb{1}_{A'} - \mathbb{1}_{B'} \tag{0.1}$$

Montrons que $A = A'$ et $B = B'$. Par symétrie des rôles il suffit de montrer que $A = A'$. On se donne donc x dans A et on montre qu'il ne peut pas être dans $B' \backslash A'$ ce qui par l'hypothèse $A' \cup B' = E$ implique $x \in A'$. Pour cela il faut observer que dans cas contraire le membre de droite de (**??**) est égale à -1 alors que celui de gauche est positif.

— **Surjective :** Soit $f \in \{-1, 0, 1\}^E$. On pose : $A = f^{-1}(\{-1, 0\})$ et $B = f^{-1}(\{0, 1\})$ on vérifie que $\Phi((A, B)) = f$

c) Par la question b on a :

$$\#S = \#(\{-1, 0, 1\}^E)$$

Mais la question a donne aussi :

$$\#(\{-1, 0, 1\}^E) = 3^{\#E} = 3^n$$

D'ou :

$$\#S = 3^n$$

2. Fausse pièce bayésienne.

Dans un sac de 100 pièces de monnaie, 99 sont normales et la centième possède deux côtés *Face*.

On choisit une pièce au hasard dans le sac et sans l'inspecter on la lance n fois de suite. On définit les évènements $F := \{$ la pièce est fausse $\}$ et $T_n := \{$ les résultats des n lancers sont tous *Face* $\}$.

a) Calculer $\mathbb{P}(T_n \mid F^c)$.
b) En utilisant la formule de Bayes, déduire $\mathbb{P}(F \mid T_n)$ et faire le calcul avec $n = 3$.
c) Combien de lancers doit-on faire pour pouvoir penser avec une confiance d'au moins 50% que la pièce choisie est fausse ?

Solution de l'exercice 2.

a) Si la pièce n'est pas fausse, on a 50% de chance d'avoir *Face* pour chaque lancer. Donc, la probabiliété qu'on obtient trois fois *Face* est $(\frac{1}{2})^3 = \frac{1}{8}$.
b) D'après la formule de Bayes, nous avons :

$$\mathbb{P}(F|T) = \frac{\mathbb{P}(T|F)\mathbb{P}(F)}{\mathbb{P}(T|F)\mathbb{P}(F) + \mathbb{P}(T|F^c)\mathbb{P}(F^c)} = \frac{1/100}{(1 + 99/8)/100} = \frac{8}{107} \simeq 0,0748.$$

c) On se place maintenant dans le cas de n observations de *Face*. En utilisant le même raisonnement que la question précédente, on a :

$$\mathbb{P}(F|n \text{ fois } \textit{Face}) = \frac{2^n}{99 + 2^n}.$$

On doit trouver l'entier n minimal tel que

$$\frac{2^n}{99 + 2^n} > \frac{1}{2}$$

i.e.

$$2^n > 99$$

ce qui conduit à

$$n_{\min} = 7.$$

3. Variable aléatoire à densité.

Soit X la variable aléatoire réelle de densité :

$$f(x) = \begin{cases} 1 - x & \text{si} \quad x \in [0,1] \\ 1 + x & \text{si} \quad x \in [-1,0] \\ 0 & \text{ailleurs} \end{cases}$$

a) Calculer sa fonction de répartition F_X.

b) Calculer l'espérance et la variance de X.

c) Calculer $\mathbb{P}(X \leq \frac{1}{4}, X^2 \leq \frac{1}{4})$.

d) Déterminer la fonction de répartition F_Y de la v.a. $Y = X^2$.

Solution de l'exercice 3.

a) On calcule la fonction de répartition de X par intégration de la densité. On a donc :

$$\begin{array}{ll} x \in]-\infty, -1[& F_X(x) = 0 \\ x \in]-1, 0[& F_X(x) = \int_{-\infty}^{x} f_X(t)dt = \int_{-1}^{x} (1+t)dt = \frac{(1+x)^2}{2} \\ x \in]0, 1[& F_X(x) = \int_{-\infty}^{x} f_X(t)dt = \int_{-1}^{0} f_X(t)dt + \int_{0}^{x} f_X(t)dt = 1 - \frac{(1-x)^2}{2} \\ x \geq 1 & F_X(x) = \int_{-\infty}^{1} f_X(t)dt = F_X(1) = 1 \end{array} \tag{0.2}$$

b) Comme f_X est paire :

$$\mathbb{E}[X] = \int_{\mathbb{R}} x f_X(x)dx = \int_{-1}^{0} x f_X(x)dx + \int_{0}^{1} x f_X(x)dx = -\int_{0}^{1} x f_X(x)dx + \int_{0}^{1} x f_X(x)dx = 0 \tag{0.3}$$

La variance de X est $Var[X] = \mathbb{E}[(X - \mathbb{E}[X])^2] = \mathbb{E}[X^2] - \mathbb{E}[X]^2$. Par conséquent :

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[X^2] &= \int_{\mathbb{R}} x^2 f_X(x)dx = \int_{-1}^{0} x^2 f_X(x)dx + \int_{0}^{1} x^2 f_X(x)dx && (0.4) \\ &= 2\int_{0}^{1} x^2 f_X(x)dx && (0.5) \\ &= 2\int_{0}^{1} (x^2 - x^3)dx && (0.6) \\ &= 2(\frac{1}{3} - \frac{1}{4}) && (0.7) \\ &= \frac{1}{6} && (0.8) \end{aligned}$$

c)

$$\begin{aligned} \mathbb{P}[X \leq \frac{1}{4}, X^2 \leq \frac{1}{4}] &= \mathbb{P}[X \leq \frac{1}{4}, -\frac{1}{2} \leq X \leq \frac{1}{2}] && (0.9) \\ &= \mathbb{P}[-\frac{1}{2} \leq X \leq \frac{1}{4}] && (0.10) \\ &= \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{4}} f_X(x)dx && (0.11) \\ &= F_X(1/4) - F_X(-1/2) = (1 - \frac{9}{32} - \frac{4}{32}) = \frac{19}{32} && (0.12) \end{aligned}$$

d) Loi de $Y = X^2$. La variable aléatoire de Y est à valeurs dans [0,1]. Pour tout $y \geq 0$,

$$\mathbb{P}[Y \leq y] = \mathbb{P}[X^2 \leq y] = P(X \leq \sqrt{y}, X \geq \sqrt{-y}) = P(X \leq \sqrt{y}) - P(X \leq -\sqrt{y}) \tag{0.13}$$

On a donc $F_Y(y) = F_X(\sqrt{y}) - F_X(-\sqrt{y})$ pour tout $y \geq 0$.
Par dérivation, on a : $f_Y(y) = \frac{1}{2\sqrt{y}} f_X(\sqrt{y}) + \frac{1}{2\sqrt{y}} f_X(-\sqrt{y})$. On prend maintenant en compte l'expression spécifique de f_X pour aboutir à :

$$f_Y(y) = \begin{cases} \frac{1-\sqrt{y}}{\sqrt{y}} & \text{si} \quad y \in]0,1] \\ 0 & \quad \text{ailleurs} \end{cases} \tag{0.14}$$

4. Loi des grands nombres dans le cas L^2.

a) Soit X une variable aléatoire réelle de variance finie. On note $m := \mathbb{E}(X)$. Rappeler et démontrer l'inégalité de Bienaymé-Chebyshev.

b) Soit $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de v.a. indépendantes et de même loi, d'espérance nulle et de variance finie σ^2. Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $S_n := \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} X_k$. Déterminer l'espérance de S_n et montrer que $\mathrm{Var}(X_n) = \frac{\sigma^2}{n}$ en admettant que pour tous $i \neq j$, $\mathbb{E}(X_i X_j) = \mathbb{E}(X_i)\mathbb{E}(X_j)$.

c) Pour $n \in \mathbb{N}^*$ et $\alpha > 0$, on définit l'évènement $A_n(\alpha) := \left\{|S_{n^2}| > \frac{1}{n^\alpha}\right\}$. Montrer que l'on peut trouver $\alpha > 0$ tel que

$$\mathbb{P}\left(\sum_{n\in\mathbb{N}} \mathbb{1}_{A_n(\alpha)} < \infty\right) = 1.$$

d) En déduire que $\mathbb{P}(\lim_{n\to\infty} S_{n^2} = 0) = 1$.

Solution de l'exercice 4.

a) L'inégalité de Bienaymé-Chebyshev est

$$\mathbb{P}(|X - m| \geq a) \leq \frac{Var(X)}{a^2}$$

Pour la prouver, on applique l'inégalité de Markov à la v.a. $Y = (X - m)^2$ d'espérance $Var(X)$,

$$\mathbb{P}(|X - m| \geq a) = \mathbb{P}(Y \geq a^2) \leq \frac{\mathbb{E}(Y)}{a^2} = \frac{Var(X)}{a^2}.$$

b) On a par linéarité que $\mathbb{E}(S_n) = 0$. Comme les v.a. en présence (X_1,...,X_n et S_n) sont toutes de moyenne nulle, on peut utiliser la formule $Var(X) = \mathbb{E}(X^2)$ valable pour X v.a. de moyenne nulle. On a également $\mathbb{E}(X_iX_j) = 0$ si $i \neq j$ en ajoutant l'indépendance.

$$\begin{aligned}
Var(S_n) &= \mathbb{E}\left[\left(\frac{1}{n}X_1 + ... + \frac{1}{n}X_n\right)^2\right] \\
&= \mathbb{E}\left(\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{n^2}X_i^2 + \sum_{1\leq i\neq j\leq n}\frac{1}{n^2}X_iX_j\right) \\
&= \sum_{i=1}^{n}\frac{1}{n^2}\mathbb{E}(X_i^2) + \sum_{1\leq i\neq j\leq n}\frac{1}{n^2}\mathbb{E}(X_iX_j) \\
&= \sum_{i=1}^{n}\frac{1}{n^2}Var(X_i^2) \\
&= \frac{\sigma^2}{n}
\end{aligned}$$

c) D'après la question a), $\mathbb{P}(A_n(\alpha)) \leq \frac{Var(S_{n^2})}{n^{-2\alpha}}$. Or, d'après la question 2, $Var(S_{n^2}) = \frac{\sigma^2}{n^2}$. On en déduit

$$\mathbb{P}(A_n) \leq \frac{\sigma^2}{n^{2-2\alpha}}.$$

Pour $\alpha = \frac{1}{8} > 0$, on obtient le terme d'une série convergente. D'après le théorème de Borel-Cantelli on a donc $P(\sum_{n\in\mathbb{N}} \mathbb{1}_{A_n(\alpha)} < \infty) = 1$.

d) On a donc $\mathbb{P}\left(\exists n_0 \in \mathbb{N}, \forall n \geq n_0 : |S_{n^2}| \leq \frac{1}{n^\alpha}\right) = 1$. Dans ce cas, comme on a $|S_{n^2}| \leq \frac{1}{n^\alpha}$ pour $n \in \mathbb{N}$ assez grand, on a aussi $S_{n^2} \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$ (car $\frac{1}{n^\alpha}$ converge vers 0), on a l'inclusion suivante d'évènements

$$\left\{\exists n_0 \in \mathbb{N}, \forall n \geq n_0 : |S_{n^2}| \leq \frac{1}{n^\alpha}\right\} \subset \left\{\lim_{n\to\infty} S_{n^2} = 0\right\}.$$

On en conclut que $\mathbb{P}(\lim_{n\to\infty} S_{n^2} = 0) = 1$.